УДК 624.072.221

В. Ф. КИРИЛЕНКО, Е. А. ПИНЧУК (Национальная академия природоохранного и курортного строительства, Симферополь), Е. Н. ТРАЧ (ДИИТ)

НАПРЯЖЕНИЯ В ДВУСКАТНЫХ КОРОБЧАТЫХ БАЛКАХ В ЗОНАХ ПОПЕРЕЧНОГО И ЧИСТОГО ИЗГИБА

У статті приведено дослідження напруженого стану двотаврових коробчатих клеєфанерних балок змінного перетину при дії зосереджених сил. Порівнюються аналітичне рішення, рішення МКЕ і елементарне рішення для нормальних і дотичних напружень в стінці балки.

Ключові слова: балка, зосереджена сила, напружений стан, напруження

В статье приведено исследование напряжённого состояния двутавровых коробчатых клеефанерных балок переменного сечения при действии сосредоточенных сил. Сравниваются аналитическое решение, решение МКЭ и элементарное решение для нормальных и касательных напряжений в стенке балки.

Ключевые слова: балка, сосредоточенная сила, напряжённое состояние, напряжение

In the article research of the tense state of box-type wooden j-beams of variable section is resulted at the action of the concentrated forces. An analytical decision, decision of eventual elements and elementary decision a method, is compared for normal and tangent tensions in the wall of beam.

Keywords: beam, concentrated forces, tense state, tensions

Постановка задачи

Рациональное очертание строительных конструкций достигается в большинстве случаев изменением высоты сечения по длине. В сооружениях из стали это в первую очередь рамные системы, ригели которых выполнены из металлических двутавров с плоскими или гофрированными стенками [1, 2]. При применении деревянных клееных конструкций такие возможности намного шире – это дощатоклееные и деревофанерные односкатные и двускатные балки, трёхшарнирные рамы и арки как прямоугольного, так и двутаврового, коробчатого и двутаврово-коробчатого сечения.

Переменность высоты сечения по длине оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние, однако учёт этого, в частности, в нормативных документах по проектированию деревянных конструкций для двускатных клееных балок сводится только к определению сечения с максимальными нормальными напряжениями и вычислению прогибов балки. Известно, что в элементах переменной высоты кроме напряжений изгиба σ_x возникают касательные напряжения τ_{xy} и напряжения σ_{xy}, действующие в перпендикулярном направлении, характер и величина которых отличается от вычисленных для элементов постоянного сечения.

Для определения напряжений в элементах переменной высоты существуют аналитические решения и численные способы, основанные в последнее время на методе конечного элемента (МКЭ). Классические методы теории упругости существуют для изгиба симметричного клина сосредоточенной силой или моментом, приложенными в его вершине. Для клина с одной горизонтальной гранью имеются решения при действии равномерно распределённой нагрузки и нагрузки, распределённой по линейному закону [3-6]. Поскольку при малых (до 5…10º) углах наклона граней распределение напряжений изгиба практически не отличается от элементарного решения, то это обстоятельство использовано для определения различными способами остальных компонент напряжения τ_{xy} и σ_y в элементах с плавным изменением прямоугольного сечения по длине [7-10].

Указанный прием использован также для определения касательных напряжений в стенках двутавровых (коробчатых) балок переменного сечения, причём полученное здесь решение по своей структуре является общим и пригодно как для симметричных относительно продольной оси элементов, так и имеющих одну горизонтальную грань. Кроме того, такое решение применимо и для аналогичных элементов прямоугольного сечения [11]. В дальнейшем оно использовано для определения скалывающих напряжений в фанерных стенках двускатных коробчатых и двутаврово-коробчатых деревянных балок, загруженных равномерно распределённой нагрузкой [12].

Следует отметить, что для элементов двутаврового (коробчатого) сечения, в отличие от призматических, задача аналитического определения напряжений σ_y, действующих в поперечном направлении в стенках и поясах весьма трудоёмка и в настоящем времени не решена. Открытым остается и вопрос определения скалывающих напряжений в поясах двутавровых и коробчатых балок.

Задачи расчёта элементов двутаврового (коробчатого) сечения эффективно решаются при использовании программных комплексов, реализующих метод конечного элемента [13, 14]. Полученные таким образом результаты определения касательных напряжений в стенках двускатных балок с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями. Кроме того, этот метод позволяет определить касательные напряжения в наклонных поясах двускатных (односкатных) элементов, а также напряжения σ_y, направленные поперёк оси балки.

Во всех перечисленных работах не рассматривались вопросы определения напряжённого состояния двутавровых (коробчатых) балок при действии сосредоточенных сил, а также не исследовались напряжения на участках балки, где внутренние усилия представлены только изгибающим моментом. Поставленные вопросы и легли в основу настоящего исследования.

Объект исследования и основные предпосылки

Рассматривается напряженное состояние свободно опертой двускатной коробчатой балки длиной 11,9 м с углом наклона верхних граней $\alpha = \mathrm{arctg}\,0,0975$. Пояса балки размерами $b_n \times h_n = 13,2 \times 16$ см выполнены из четырёх сосновых досок толщиной 3,3 см $(4 \times 3,3 = 13,2)$ см, стенки – из клееной берёзовой фанеры марки ФСФ толщиной $\delta_ф = 10$ мм. Расчётный пролёт с учётом опирания $\ell = 11,7$ м, высота торцевого сечения 90 см, высота сечения в середине пролёта 148 см. Нагрузка на балку: две сосредоточенные силы по 45 кН, приложенные в третях пролёта. Направление волокон рубашки фанеры предполагается вдоль продольной оси балки, а клеевые стыки листов фанеры по длине выполняются «на ус», что предусматривает восприятие продольных сжимающих и растягивающих усилий в плоскости стенки. Соединение поясных досок между собой и с фанерной стенкой является клеевым (монолитным) и не предусматривает взаимных смещений в процессе деформирования. Работа элементов балки рассматривается в упругой стадии, а деформации считаются малыми. Неоднородность сечения балки здесь не учитывается, поскольку модуль упругости фанеры вдоль оси балки $E_ф = 1,2 \times 9000 = 10800$ МПа незначительно отличается от модуля упругости древесины сосны $E_д = 10000$ МПа.

Касательные напряжения в стенке (аналитическое решение)

Для определения касательных напряжений в фанерных стенках используем общее решение для балок, имеющих одну горизонтальную грань и представленных прямоугольным, двутавровым или коробчатым сечением [11]

$$\tau_ф = \frac{QS}{\delta I} + \frac{M}{\delta I}\left(\frac{dS}{dx} + \frac{1}{2}\delta y \frac{dh}{dx}\right) - \frac{MS}{\delta I^2}\frac{dI}{dx}, \quad (1)$$

где M, Q – изгибающий момент и поперечная сила в сечении балки; δ – толщина стенки (для коробчатой балки $\delta = 2\delta_ф$); y – расстояние от нейтральной оси до точки, в которой определяются напряжения (положительным считается направление в сторону наклонной грани балки); $\frac{dh}{dx}$ – производная функции высоты сечения балки (для балок с линейно изменяющейся высотой – тангенс угла наклона грани).

В выражении (1) момент инерции сечения I, статический момент отсечённой части сечения S и их производные по x для коробчатой балки вычисляются следующим образом (2)

$$S = \frac{1}{2}\left[(b_n + \delta)(h - h_n) + \delta\left(\left(\frac{h - 2h_n}{2}\right)^2 - y^2\right)\right],$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2}\left[(b_n + \delta)h_n + \frac{\delta}{2}(h - 2h_n)\right]\frac{dh}{dx},$$

$$I = 2\left[\frac{(b_n + \delta)h_n^3}{12} + (b_n + \delta)h_n\left(\frac{h - h_n}{2}\right)^2\right] + \frac{\delta(h - 2h_n)^3}{12},$$

$$\frac{dI}{dx} = \left[(b_n + \delta)(h - h_n) + \frac{\delta}{4}(h - 2h_n)^2\right]\frac{dh}{dx}. \quad (2)$$

Вычисление касательных напряжений в стенке проводилось в двух сечениях в зоне поперечного изгиба ($x = l/8 = 146,25$ см и $x = \ell/4 = 292,5$ см) и двух сечениях в зоне чистого изгиба ($x = 3\ell/8 = 438,75$ см и

$x = 486$ см). В каждом сечении выбраны три точки: верхняя кромка стенки, контактирующая с верхним поясом; точка на нейтральной оси сечения; нижняя кромка стенки, контактирующая с нижним поясом. Все расчёты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Касательные напряжения в фанерной стенке

x, см	h_x, см	Усилия		Геометрические характеристики					Напряжения	
		M, кНм	Q, кН	I, см^4	$\frac{dI}{dx}$, см^3	$\frac{dS}{dx}$, см^2	S, см^3	$\frac{1}{2}\delta y\frac{dh}{dx}$, см^2	$\frac{QS}{\delta I}$, кН/см^2	τ, кН/см^2
146,25	105,2	65,81	45	1043200	2376	15,42	10847 12187 10847	3,57 0 -3,57	0,234 0,263 0,234	0,216 0,224 0,193
292,5	119,5	131,62	45	1424600	2827	16,12	12586 14500 12586	4,27 0 -4,27	0,199 0,229 0,199	0,178 0,170 0,139
438,75	133,8	175,50	-	1873600	3299	16,82	14324 16915 14324	4,96 0 -4,96	- - -	-0,016 0,060 -0,062
486	138,4	175,50	-	2032900	3452	17,04	14884 17714 14884	5,19 0 -5,19	- - -	-0,013 -0,056 -0,054

В предпоследней колонке этой таблицы помещены значения напряжений, вычисленные согласно первому слагаемому выражения (1) – формуле Д. И. Журавского, в последней колонке – полные значения.

Численное решение (решение МКЭ)

Вычисление всех компонент напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} в поясах и стенке выполнялось с помощью программного комплекса «Лира» (версия 9.6), реализующего метод конечных элементов.

Расчетная модель балки выполнена в плоско-объемной постановке. Пояса балки описаны изопараметрическими объемными конечными элементами 36, фанерные стенки – универсальными конечными элементами плоской задачи 27. Вблизи наклонного контура КЭ приобретают неправильную форму, в частности типа 34 – в поясах и 24 – в стенке. Размеры КЭ поясов – $2\times2\times3{,}3$ см, фанерной стенки – 2×2 см. По высоте сечений количество конечных элементов расчетной модели составило от 45 на опоре до 74 в середине пролета балки. Всего расчетная схема включает 111696 КЭ. Жесткости КЭ моделировались изотропными с одинаковыми упругими характеристиками поясов и стенок: модуль упругости $E = 10000$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}02$, плотность $\rho = 5$ кН/м^3. Нагрузка в третях пролёта распределялась на группу контурных узлов по ширине верхнего пояса и составила $q = 9\times5 = 45$ кН (здесь 9 кН – сила в узле, 5 – число узлов по ширине сечения). Передача опорного давления осуществлялась на длину площадки 20 см, что соответствовало 11 крайним узлам КЭ с каждой стороны нижнего пояса.

В результате расчета получены нормальные σ_x, σ_y и касательные напряжения τ_{xy} (в кН/см^2) в различных точках по длине и высоте поперечных сечений поясов балки и стенок. На рис. 1 представлены эпюры нормальных напряжений σ_x на расстоянии 287,5 см (первое сечение – зона поперечного изгиба) и 486,0 см (второе сечение – зона чистого изгиба) от опоры.

Расчетная схема балки и эпюры распределения напряжений σ_y по высоте сечений в зонах поперечного и чистого изгиба показаны на рис. 2.

В этих же сечениях на рис. 3 показано распределение касательных напряжений τ_{xy}.

а) *б)*

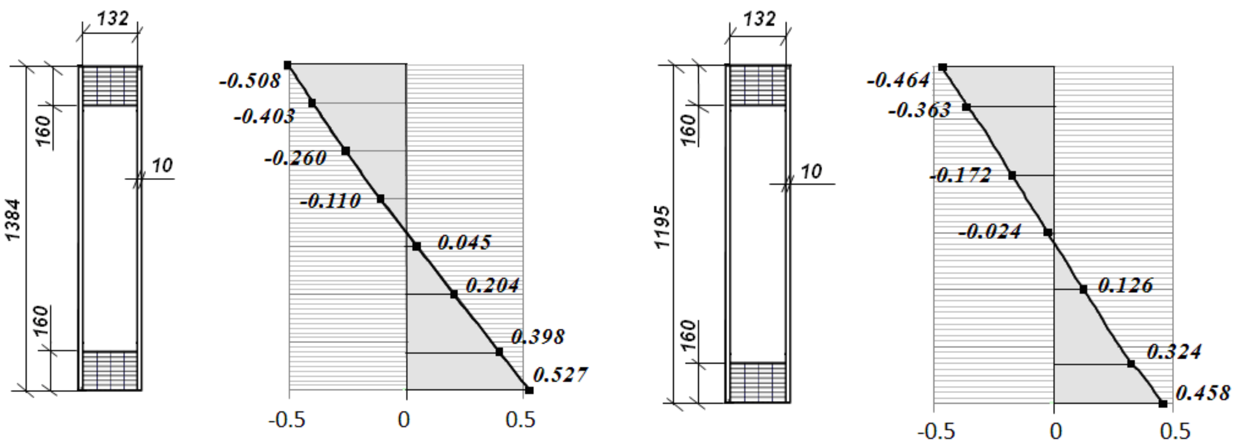


Рис. 1. Эпюры напряжений σ_x по высоте первого сечения (*а*) и второго сечения (*б*)

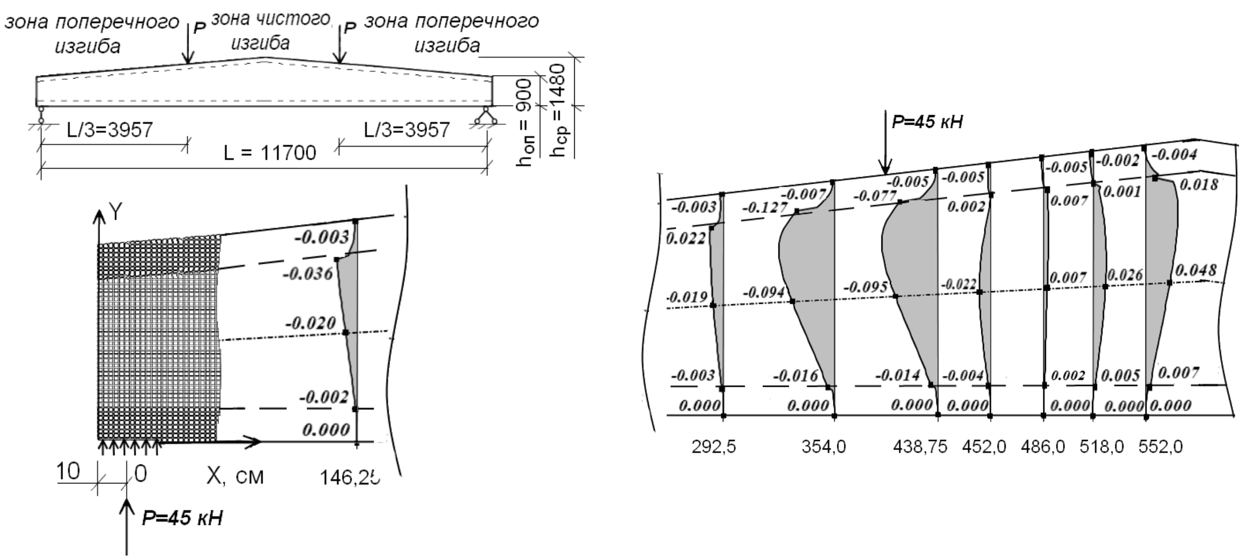


Рис. 2. Расчетная схема балки и эпюры напряжений σ_y по высоте сечений

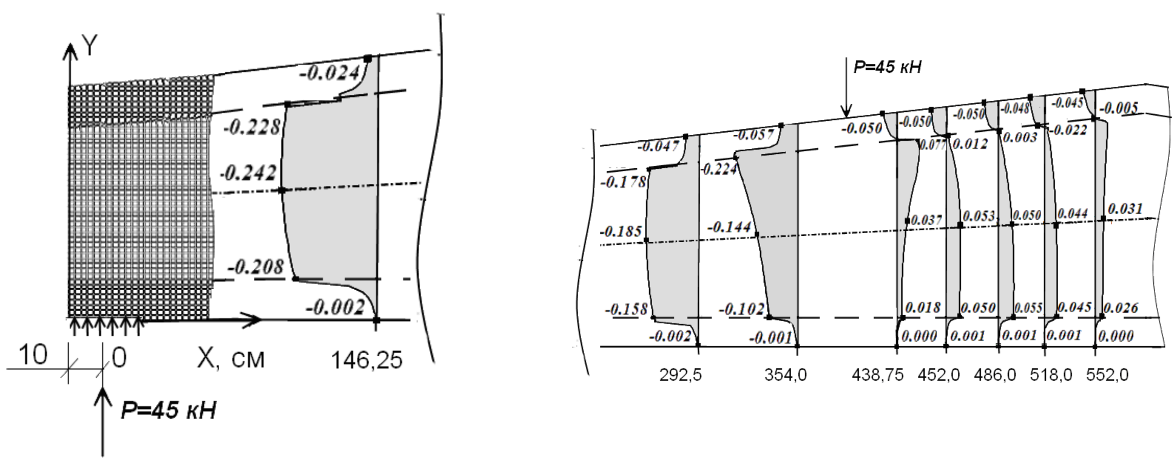
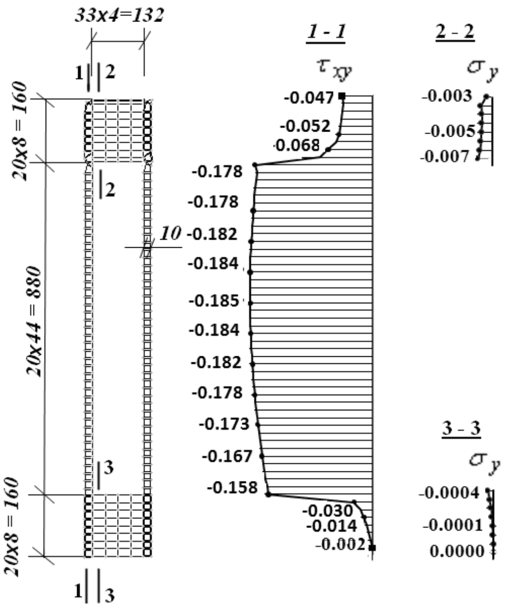


Рис. 3. Распределение касательных напряжений τ_{xy} в сечениях

Для проверки выполнения условий равновесия в поперечных сечениях балки на рис. 4 показано разбиение на конечные элементы в поясах и стенке и распределение напряжений τ_{xy} по высоте сечений в зоне поперечного изгиба на расстоянии $x = 292{,}5$ см (см. рис. 4, *а*) и в зоне чистого изгиба при $x = 518$ см (см. рис. 4, *б*) в стенке и поясах. Здесь же показано распределение напряжений σ_y по высоте поясов.

а)



б)

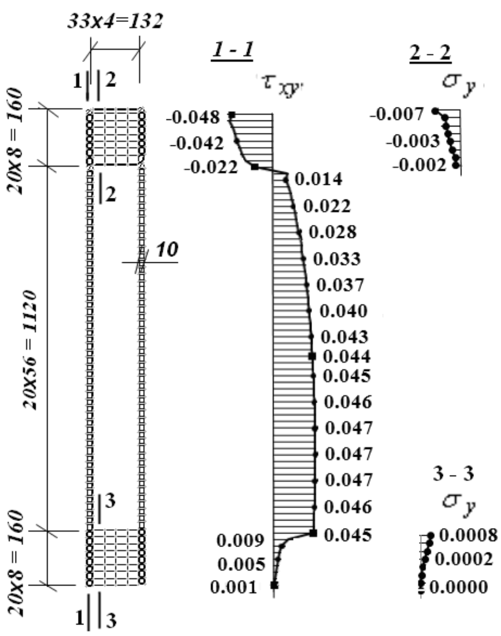


Рис. 4. Эпюры напряжений τ_{xy} в сечениях балки и напряжений σ_y в поясах

Обсуждение полученных результатов

Исследование нормальных напряжений σ_x в сечениях балки с помощью МКЭ показало, что их распределение носит практически линейный характер, а максимальные значения в верхнем $\sigma_в$ и нижнем поясе $\sigma_н$ несколько отличаются между собой и от элементарного решения $\sigma_э = M \cdot h/2I$:

– в зоне поперечного изгиба для сечения $x = 292{,}5$ см соответственно

$\sigma_в = 0{,}464$ кН/см^2; $\sigma_н = 0{,}458$ кН/см^2; $\sigma_э = 0{,}552$ кН/см^2;

– в зоне чистого изгиба для сечения $x = 486$ см:

$\sigma_в = 0{,}550$ кН/см^2; $\sigma_н = 0{,}508$ кН/см^2; $\sigma_э = 0{,}597$ кН/см^2.

Сопоставление максимальных значений напряжений в поясах балок показывает, что элементарное решение в этих сечениях даёт завышение от 8 до 20 %.

В двускатной балке, в отличие от балок постоянной высоты, в наклонных поясах возникают касательные напряжения и напряжения, действующие поперёк продольной оси балки. В верхних точках наклонных граней они определяются следующими выражениями (3), полученными из условий равновесия бесконечно малого элемента

$$\tau_{xy} = \sigma_x \operatorname{tg}\alpha\,,\ \sigma_y = \tau_{xy} \operatorname{tg}\alpha = \sigma_x \operatorname{tg}^2\alpha \quad (3)$$

В нашем случае $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}0975$ и эти зависимости с большой точностью подтверждаются вычислениями МКЭ (см. рис. 2, 3) как и в зоне поперечного, так и чистого изгиба.

Касательные напряжения в сечениях балки в зоне поперечного изгиба распределяются несимметрично, что следует из данных табл. 1 и эпюр напряжений согласно приведенному выше рис. 3. При сохранении общих закономерностей их распределения по высоте фанерных стенок в зоне поперечного изгиба между аналитическим решением и решением МКЭ существует отличие значений в различных точках, составляющее от 2 до 12 %. Следует отметить, что значения касательных напряжений во всех точках сечений, вычисленные по формуле Д. И. Журавского, на 9…43 % больше напряжений, полученных аналитически согласно (1), а также вычисленные МКЭ.

В зонах поперечного изгиба эпюра распределения касательных напряжений, построенная на основе вычислений МКЭ, однозначна и из условия равновесия

$$\begin{aligned} &\sum \tau^{i}_{вп} \cdot A^{i}_{кэ,п} + \sum \tau^{i}_{ст} \cdot A^{i}_{кэ,ст} + \\ &+ \sum \tau^{i}_{нп} \cdot A_{кэ,п} = Q \end{aligned}, \qquad (4)$$

где $\tau^{i}_{вп}$, $\tau^{i}_{ст}$, $\tau^{i}_{нп}$ – касательные напряжения в *i*-ом элементе соответственно верхнего пояса, стенки и нижнего пояса; $A^{i}_{кэ,п}$, $A^{i}_{кэ,ст}$ – площадь конечного элемента пояса и стенки в плоскости сечения.

Для сечения при $x = 292{,}5$ см количество КЭ в верхнем и нижнем поясе составляет 2×48, в стенке – 88 (см. рис. 4, *а*), а вычисление почленно согласно (4) даёт $11{,}694 + 30{,}954 + 3{,}086 = 45{,}734$ кН, что отличается от значения поперечной силы в этом сечении $Q = 45$ кН на 1,63 %, причём доля восприятия поперечной силы только поясами здесь достигает 32 %.

В отличие от балок постоянной высоты в зоне отсутствия поперечной силы, называемой в сопротивлении материалов зоной чистого изгиба, возникают касательные напряжения, а эпюры их распределения по высоте поперечных сечений двузначны, причем изменение знака происходит в верхних точках стенки при примыкании к верхнему поясу (см. рис. 4, *б*). Здесь максимальные касательные напряжения в поясах мало отличаются от вычисленных аналитически. В этой зоне из условий равновесия сил в поперечном сечении при $x = 518$ см $(Q = 0)$ согласно (4) получим $-9{,}98 + 8{,}74 + 0{,}86 = -9{,}98 + 9{,}6 = -0{,}38$ кН, что на 4 % отличается от значения входящих слагаемых по абсолютной величине.

Изменение сечения по длине как в зоне поперечного, так и чистого изгиба приводит к возникновению напряжений σ_y, которыми в сопротивлении материалов пренебрегают. В точках верхнего (наклонного) контура балки их значения, полученные МКЭ, с высокой точностью совпадают с вычисленными согласно (3). В поперечных сечениях наблюдается их уменьшение при продвижении к нижней горизонтальной грани, на которой $\sigma_y = 0$. В местах контакта верхнего (и нижнего) пояса со стенкой происходит скачкообразное увеличение напряжений σ_y, что объясняется большим различием ширины сечения поясов ($b_n = 15{,}2$ см) и толщиной стенок ($\delta = 2$ см). Следует отметить, что наибольшие напряжения σ_y в верхних точках стенок коробчатой балки возникают в местах действия максимальных нормальных напряжений σ_x, т. е. вблизи действия сосредоточенных сил в третях пролёта.

Выводы

1. В наклонных поясах двускатных коробчатых балок возникает полный тензор напряжений, что требует для деревянных поясов, как элементов с резко выраженной анизотропией, учёта сложного напряженного состояния при их расчёте.

2. Переменность высоты для стенок коробчатых балок приводит к уменьшению в них касательных напряжений по сравнению с элементами постоянной высоты, что является некоторым резервом их прочности и местной устойчивости.

3. В двускатных балках коробчатого сечения по сравнению с балками постоянной высоты доля участия поясов в восприятии поперечной силы значительно возрастает, и это обстоятельство должно учитываться при их проектировании.

4. Напряжения σ_y, вызванные переменностью сечения по длине в коробчатой балке незначительны как в зоне поперечного, так и чистого изгиба. Судя по значениям, их учёт для верхних участков стенок возможен только в зонах действия максимальных нормальных напряжений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Білик, С. І. Раціональні сталеві каркаси малоенергоємних будівель із двотаврів змінного перерізу [Текст]: Автореф. докт. техн. наук/ КНУБА: 05.23.01. – К:, 2008. – 33 с.
2. Нилов, А. А. Рамы из сварных двутавров с гофрированной стенкой [Текст] / А. А. Нилов // зб. наук. праць / УкрНДПІ сталевих конструкцій. – К.: Сталь, 2009. – С. 71-78.
3. Тимошенко, С. П., Гудьер, Дж. Теория упругости [Текст] / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
4. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности [Текст] / В. И. Самуль. – М.: Высш. шк., 1970. – 288 с.
5. Кириленко, В. Ф., Мотина, В. Г. Изгиб клинообразной балки сосредоточенным моментом, приложенным к её вершине [Текст] / В. Ф. Кириленко, В. Г. Мотина // Строительные конструкции и материалы: сб. научн. тр. / КИПКС. – Симферополь, 1997. – С. 95-101. Тимошенко, С. П. Теория упругости [Текст] /

С. П. Тимошенко. – К.: Наукова думка, 1972. – 501 с.
6. Maki, A. C., Kuenzi, E. W. Deflection and stresses of tapered Wood beams [Текст] / A. C. Maki, E. W. Kuenzi // U.S. Forest service Research Paper. – FPL 34 – September, 1965. – 54 p.
7. Ali, S. M., Sarna, S. I. Stress trajectories and stress contours in tapered beams [Текст] / S. M. Ali, S. I. Sarna // Strain. – 14. – № 2. – 1978. – P. 58-61.
8. Кириленко, В. Ф., Мотина, В. Г. Изгиб симметричных клиньев при малых углах наклона граней [Текст] / В. Ф. Кириленко, В. Г. Мотина // Строительство и техногенная безопасность: Сб. научн. тр. / КАПКС. – Вып. 7. – Симферополь, 2002. – С. 38-40.
9. Кириленко, В. Ф. Определение напряжений в клеевых швах дощатоклееных элементов переменной высоты [Текст] / В. Ф. Кириленко // Композиционные материалы и конструкции для сельскохозяйственного строительства: Межвуз. темат. сб. тр. – Саранск, 1982. – С. 31-34.
10. Кириленко, В. Ф., Пинчук, Е. А. Скалывающие напряжения в деревянных балках переменной высоты [Текст] / В. Ф. Кириленко, Е. А. Пинчук // Науковий вісник будівництва. – 2009. – Вип. 54. – Харків: ХДТУБА, ХОТВ АБУ, 2009. – С. 179-185.
11. Кириленко, В. Ф., Пинчук, Е. А. Напряжения в стенках деревофанерных элементов переменной высоты [Текст] / В. Ф Кириленко, Е. А. Пинчук // Современные строительные конструкции из металла и древесины: Сб. научн. тр. / ОГАСА. – Одесса, 2010. – Вып. 14 (Часть 1). – С. 108-112.
12. Кириленко, В. Ф., Пинчук, Е. А. Клееные деревянные и деревофанерные конструкции для покрытий спортивных сооружений [Текст] / В. Ф. Кириленко, Е. А. Пинчук // Зб. наук. праць / Укр НДПІ сталевих конструкцій. – Вип. 6. – К.: Сталь, 2010. – С. 21-29.
13. Кириленко, В. Ф., Пинчук, Е. А. Изгиб симметричной двутавровой клинообразной балки [Текст] / В. Ф. Кириленко, Е. А. Пинчук // Науковий вісник будівництва. – 2010. – Вип. 59.– Харків: ХДТУБА, ХОТВ АБУ, 2010. – С. 368-374.

Поступила в редколлегию 17.07.2011.
Принята к печати 30.07.2011.