

В. Р. СКАЛЬСЬКИЙ, О. М. СТАНКЕВИЧ (Фізико-механічний інститут імені Г. В. Карпенка НАНУ, Львів), В. З. СТАНКЕВИЧ (Львівський науково-дослідний інститут судових експертиз), Ю. Я. МАТВІЙ (Луцький національний технічний університет)

## АМПЛІТУДНО-ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ ПОВЕРХНІ ПІВПРОСТОРУ, ПОСЛАБЛЕНОГО ДИСКОПОДІБНОЮ ТРІЩИНОЮ ВІДРИВУ

Представлено розв'язок динамічної задачі про визначення хвильового поля переміщень на поверхні пружного півпростору, спричиненого розкриттям внутрішньої тріщини відриву. На підставі розв'язків крайових інтегральних рівнянь показано характер зміни амплітудно-частотних характеристик пружних коливань на поверхні твердого тіла у залежності від розмірів дефекту.

*Ключові слова:* тріщина відриву, пружні хвилі, крайові інтегральні рівняння

Руйнування матеріалів конструкцій – складний процес, який охоплює цілу низку можливих механізмів та явищ. Найнебезпечнішим дефектом матеріалу вважають тріщину, особливо за крихкого руйнування. У результаті стрибкоподібного поширення тріщин пружні хвилі акустичної емісії (АЕ), які випромінюються у матеріалі, перетворюють первинними перетворювачами в електричні сигнали, за якими можна ідентифікувати стадії руйнування.

Для ефективного діагностування технічного стану різноманітних промислових об'єктів та визначення їх залишкового ресурсу використовують підходи механіки руйнування матеріалів [1]. За побудованими математичними моделями процесів дефектоутворення, які супроводжуються випромінюванням АЕ у навантажених тілах, встановлюють залежності між характеристиками дефектів та параметрами пружних хвиль.

У цьому аспекті значну зацікавленість викликає математичне моделювання тріщин як джерел АЕ. У розв'язаних раніше динамічних задачах теорії тріщин використано різні підходи щодо вибору моделі тріщини (точкове джерело, півбезмежна плоска тріщина, сферична порожнина тощо) та методів математичних розрахунків, зокрема методів сингулярних інтегральних рівнянь [2], методу скінчених елементів [3], скінчених різниць [4] тощо. Більшість задач розв'язано для випадку безмежного тіла. Врахування ж зовнішньої вільної поверхні тіла дозволяє коректніше описати фізичні явища. У цьому випадку хвильова картина у тілі значно складніша, ніж у випадку безмежного тіла, оскільки взаємодія пружних хвиль з поверхнею породжує додаткові коливання, які можуть суттєво впливати на перерозподіл характеристик

пружного поля переміщень від тріщини. У працях [5–8] із застосуванням методу крайових інтегральних рівнянь (КІР) досліджено характеристики пружного поля переміщень на поверхні півпростору, ініційованого зміщенням протилежних поверхонь внутрішніх тріщин різної орієнтації.

*Мета досліджень* – вивчення амплітудно-частотних параметрів хвильового поля переміщень, внаслідок зміщення поверхонь наявної у пружному півпросторі дископодібної тріщини за механізмом відриву.

Розглядаємо півбезмежне пружне ізотропне тіло у вигляді півпростору, послаблене дископодібною тріщиною, яку моделюємо у вигляді плоского розрізу (рис. 1). Тріщина займає плоску область  $S_1$  і паралельна поверхні  $S_0$  півпростору. Глибина залягання дефекту становить  $d$ . Пружні хвилі, породжуються розкриттям протилежних поверхонь  $S^\pm$  тріщини. При цьому її контур залишається нерухомим, а контакт поверхонь у процесі розкриття відсутній.

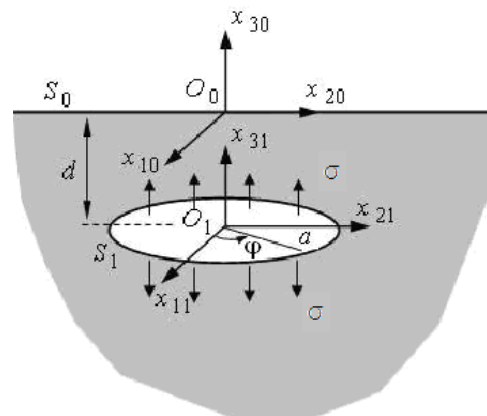


Рис. 1. Схема зміщення поверхонь тріщини відриву у півпросторі

Задача полягає у визначенні поля пружних переміщень  $\bar{\mathbf{u}}$ , які задовольняють диференціальне рівняння Ляме

$$\Delta_3 \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{1-2\mu} \text{grad div } \bar{\mathbf{u}} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона,  $\rho$  – питома густина,  $G$  – модуль зсуву матеріалу тіла, з крайовими умовами

$$u_j(\mathbf{x}, t) = U_j(\mathbf{x}, t), \quad j = \overline{1, 3}, \quad x \in S_1, \quad (2)$$

$$\sigma_{j3}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad j = \overline{1, 3}, \quad x \in S_0,$$

та нульовими початковими умовами

$$u_j(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \dot{u}_j(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (4)$$

Задачу розв'язуємо у перетвореннях Фур'є за часом. Тоді рівняння (1) запишемо у вигляді

$$\Delta_3 \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{1-2\mu} \text{grad div } \tilde{\mathbf{u}} + \omega^2 \frac{\rho}{G} \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (5)$$

а крайові умови (2)-(3) – у вигляді

$$\tilde{u}_j(\mathbf{x}, \omega) = \tilde{U}_j(\mathbf{x}, \omega), \quad j = \overline{1, 3}, \quad x \in S_1, \quad (6)$$

$$\tilde{\sigma}_{j3}(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad j = \overline{1, 3}, \quad x \in S_0. \quad (7)$$

Параметр перетворення Фур'є ототожнюємо з частотою коливань  $\omega$ , а трансформанти Фур'є  $\tilde{u}_j, \tilde{\sigma}_j$  – з амплітудними значеннями відповідних фізичних величин  $u_j, \sigma_j$ . Розглядаємо усталений у часі процес, тому початкові умови відсутні. Функціями  $\tilde{U}_j$  задаємо розкриття поверхонь тріщини у вигляді стрибка переміщень точок протилежних поверхонь  $S_1^\pm$  дефекту

$$\tilde{U}_j(\mathbf{x}, \omega) = \Delta \tilde{u}_{j1}(x, \omega) = [\tilde{u}_{j1}^-(\mathbf{x}, \omega) - \tilde{u}_{j1}^+(\mathbf{x}, \omega)] / 4\pi, \quad j = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x} \in S_1.$$

Для розв'язання задачі використовуємо метод КІР, який дозволяє перейти від тривимірної задачі до двовимірної та не накладає обмежень на геометрію області дефекту.

Розв'язок рівняння (5) подамо у формі Гельмгольца через скалярний  $\phi$  та векторний  $\tilde{\psi}$  потенціали

$$\tilde{\mathbf{u}} = \text{grad } \phi + \text{rot } \tilde{\psi}, \quad (8)$$

які задовольняють однорідні рівняння Гельмгольца

$$\Delta_3 \phi + \omega_1^2 \phi = 0, \quad \Delta_3 \tilde{\psi}_j + \omega_2^2 \tilde{\psi}_j = 0, \quad j = \overline{1, 3},$$

де  $\omega_j = \omega/c_j, j = 1, 2, c_1, c_2$  – швидкості поширення у тілі поздовжньої та поперечної пружних хвиль. Єдиність розв'язку задачі забезпечується накладанням додаткових умов випромінювання Зоммерфельда на безмежності [9].

Для представлення функцій  $\tilde{\phi}$  та  $\tilde{\psi}$  використали результати праці [10]

$$\tilde{\phi} = \frac{2}{\omega_2^2} \left\{ \left( \Delta_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right) P_{11} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial P_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} \right) \right\};$$

$$(3) \quad \tilde{\psi}_j = (-1)^{j+1} \frac{2}{\omega_2^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{(3-j)}} \left( \frac{\partial P_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_1} \right) + \frac{\omega_2^2}{2} P_{(3-j)2} + \frac{\partial^2 P_{32}}{\partial x_{(3-j)} \partial x_3} \right\};$$

$$j = 1, 2, \quad \tilde{\psi}_3 = 0,$$

де  $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  – двовимірний оператор Лапласа;

$$P_{jk}(\mathbf{x}) = \iint_S \Delta \tilde{u}_j(\xi) \Phi_k(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi; \quad (9)$$

$$\Phi_k(\mathbf{x}, \xi) = \frac{\exp(i\omega_k |\mathbf{x} - \xi|)}{|\mathbf{x} - \xi|}; \quad j = \overline{1, 3}, \quad k = 1, 2$$

– потенціали Гельмгольца. Тут  $|\mathbf{x} - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}$  – відстань між точками  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  і  $\xi(\xi_1, \xi_2, 0)$ . Густини  $\Delta \tilde{u}_j$  потенціалів характеризують стрибок зміщень точок протилежних поверхонь тріщини в процесі її розкриття в напрямку відповідних координатних осей. Вибір розв'язку за допомогою потенціалів (9) автоматично задовольняє умови Зоммерфельда на безмежності.

Надалі обмежимося розглядом осесиметричної задачі, коли функції розкриття поверхонь тріщини описуються залежностями

$$\Delta u_{11}(x, \omega) = Q(r, \omega) \cos \varphi;$$

$$\Delta u_{21}(x, \omega) = Q(r, \omega) \sin \varphi;$$

$$\Delta u_{31}(x, \omega) = F(r, \omega), \quad x \in S_1,$$

де  $r, \varphi$  – полярні координати. Для спрощення запису у подальшому знак « $\Delta$ » над шуканими величинами опускаємо.

Переміщення  $\bar{\mathbf{u}}$  в довільній точці  $\mathbf{x}_n$  тіла складаються з переміщень  $\bar{\mathbf{u}}_n$ , спричинених

розкриттям поверхонь дефекту, і переміщень  $\bar{\mathbf{u}}_0$  від коливання точок поверхні півпростору

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_n) = \bar{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}_n) + \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}_n). \quad (10)$$

Після виконання послідовності відповідних підстановок потенціали Гельмгольца набувають вигляду

$$P_{j l k n}(\mathbf{x}_n) = \iint_S \Delta u_{j n}(\xi) \Phi_l(\mathbf{x}_{kn}, \xi) dS_\xi;$$

$$j = \overline{1,3}; \quad l = 1,2; \quad k, n = 0,1,$$

де густини  $\Delta u_{j1}$  – відомі (задані) функції розкриття поверхонь тріщини, а невідомі густини  $\Delta u_{j0}$  – характеризують умовні переміщення точок поверхні півпростору.

Для визначення  $\Delta u_{j0}$  задовольняємо крайові умови на поверхні  $S_0$  півпростору (7) і отримуємо систему трьох двовимірних КІР відносно невідомих густин  $\Delta u_{j0}$ :

$$\Delta_2 (\Delta_2 + (1 - \delta_{j3}) \omega_1^2 + \delta_{j3} \omega_2^2) \times$$

$$\times \iint_{S_0} \Delta u_{j0}(\xi) \frac{\exp(i\omega_1 |\mathbf{x}_0 - \xi|)}{|\mathbf{x}_0 - \xi|} dS_\xi -$$

$$- \left( \Delta_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right)^2 \iint_{S_0} \Delta u_{j0}(\xi) \frac{\exp(i\omega_2 |\mathbf{x}_0 - \xi|)}{|\mathbf{x}_0 - \xi|} dS_\xi =$$

$$= -B_j(\mathbf{x}_0); \quad j = \overline{1,3}; \quad \mathbf{x}_0 \in S_0. \quad (11)$$

Вирази  $B_j$  у правих частинах рівнянь (11) містять двовимірні інтеграли з відомими густинами  $\Delta u_{j1}$ . Застосувавши до системи КІР (11) двовимірне інтегральне перетворення Фур'є за змінними  $x_1, x_2$ , отримали систему лінійних алгебричних рівнянь відносно Фур'є-трансформант функцій  $\Delta u_{j0}$ . Розв'язавши систему рівнянь та застосувавши до її розв'язків обернене перетворення Фур'є, отримали інтегральні представлення для густин  $\Delta u_{j0}$  через відомі функції розкриття поверхонь тріщини

$$\Delta u_{j0}(\zeta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{\tau}{R(\tau)} J_0(\tau |\zeta - \eta|) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^3 a_{jn} B_n d\tau dS_\eta;$$

$$R(\tau) = R_3^2(\tau) - \tau^2 R_1(\tau) R_2(\tau);$$

$$R_j(\tau) = \sqrt{\tau^2 - \omega_j^2}; \quad j = 1,2; \quad R_3(\tau) = \tau^2 - \frac{\omega_2^2}{2}. \quad (12)$$

У результаті врахування крайових умов на поверхні півпростору у співвідношеннях (12) з'являється функція Релея  $R(\tau)$ , що свідчить про появу у тілі нового типу пружної хвилі – поверхневої хвилі Релея.

На наступному етапі розв'язування задачі підставляли знайдені співвідношення для густин  $\Delta u_{j0}$  (12) у вирази для переміщень (10) та визначали переміщення на поверхні півпростору. Для тріщини нормального відриву функції розкриття поверхонь задавали співвідношеннями

$$\Delta u_{11}(x) = \Delta u_{21}(x) = 0;$$

$$\Delta u_{31}(x) = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} = \sqrt{a^2 - r^2}; \quad x \in S_1.$$

Виконавши відповідні підстановки та обчисливши двовимірні інтеграли по області тріщини та поверхні півпростору, отримали інтегральні представлення для вертикальних та горизонтальних переміщень на поверхні півпростору:

$$u_3(r^*, \omega) = 2\pi a \int_0^{\infty} \frac{\Omega_3(\tau)}{R(\tau)} M(\tau) J_0(\tau r^*) d\tau;$$

$$u_r(r^*, \omega) = -4\pi a \int_0^{\infty} \frac{\Omega_r(\tau)}{R(\tau)} M(\tau) J_1(\tau r^*) d\tau;$$

$$\Omega_r(\tau) = R_2(\tau) R_3(\tau) [e^{-dR_1(\tau)} - e^{-dR_2(\tau)}];$$

$$\Omega_3(\tau) = \frac{1}{\tau} \left[ \tau^2 R_1(\tau) R_2(\tau) e^{-dR_1(\tau)} - \right.$$

$$\left. - R_3^2(\tau) e^{-dR_2(\tau)} \right];$$

$$M(\tau) = \frac{\sin a\tau}{a\tau} - \cos a\tau,$$

де  $a$  – радіус тріщини ( $R_T$ ),  $r^*$  – відстань від епіцентру утворення тріщини до точки спостереження  $A$ , в якій визначають переміщення (рис. 2).

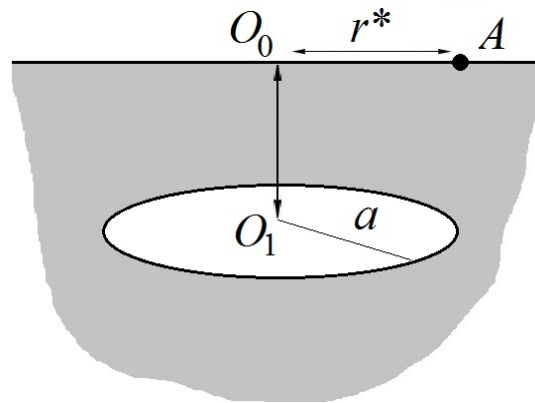


Рис. 2. Схема визначення переміщень на поверхні півпростору

На рис. 3 представлені залежності амплітудних нормованих значень переміщень  $|u_3|/a$  і  $|u_r|/a$  від хвильового числа  $\omega_2 a$  за різних розмірів тріщин ( $R_T = a; 2a; 4a$ ), отримані у ре-

зультаті числових розрахунків для значення коефіцієнта Пуассона  $\mu = 0,3$ . Глибина  $d$  залягання тріщини становила  $2a$ , відстань  $r^* = 8a$ .

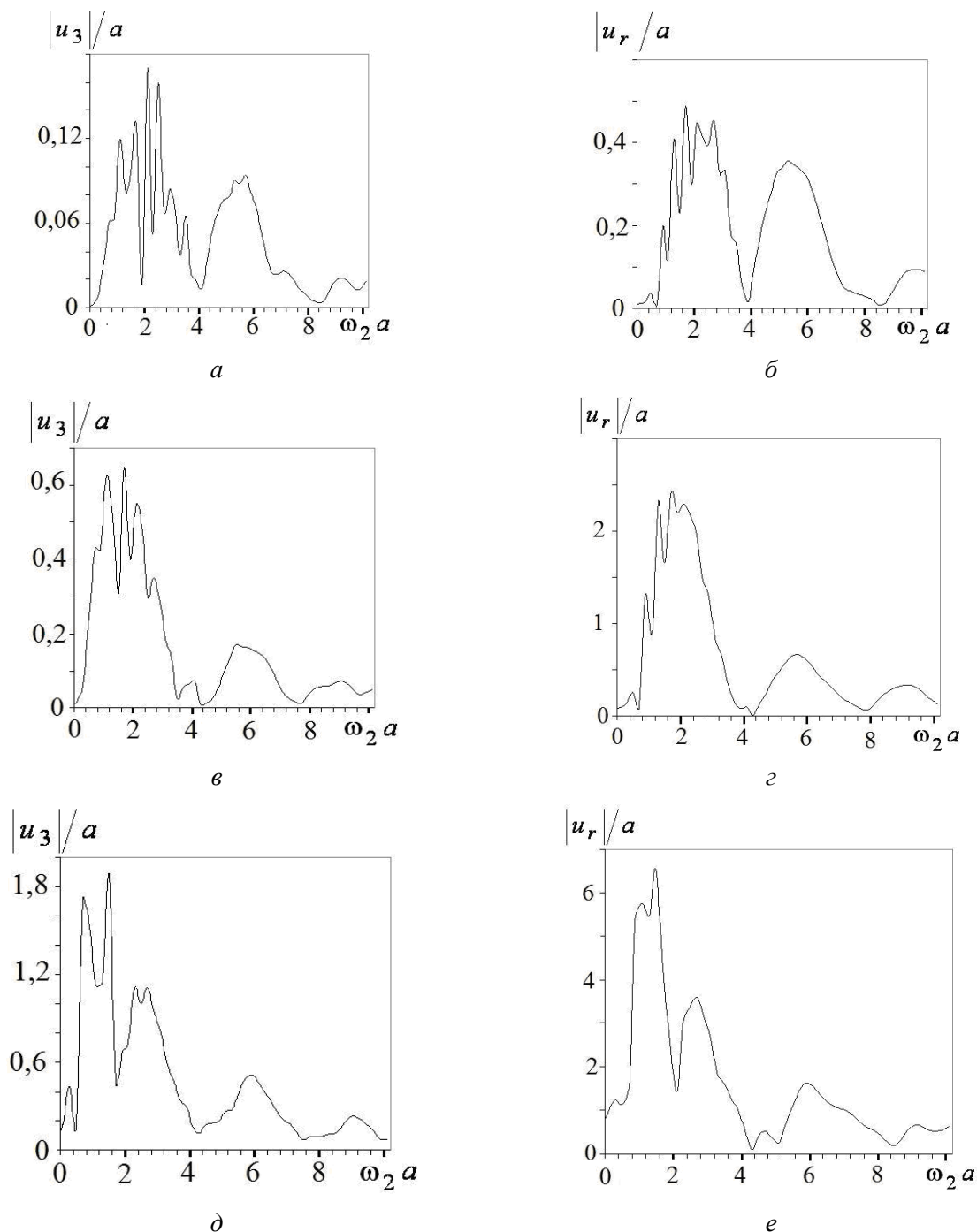


Рис. 3. Залежність нормованих значень переміщень на поверхні півпростору у точці спостереження  $r^* = 8a$  і  $d = 2a$  від хвильового числа:

$$a, б - R_T = a; в, г - R_T = 2a; д, е - R_T = 4a$$

Графіки залежностей починаються від статичних значень переміщень для  $\omega_2 a = 0$ , потім зростають і приймають осцилюючий характер з поступовим зниканням. Збільшення розмірів

тріщини призводить до: збільшення амплітудних значень переміщень; зменшення кількості осциляцій на проміжку  $\omega_2 a < 4$ ; звуження ширини спектра частот та зміщення у сторону ниж-

чих частот значення приведеної частоти, за якої переміщення досягають максимальних значень.

Як зазначено вище, під час АЕ-діагностування технічних об'єктів прийняті пружні коливання поверхні реєструють як електричні сигнали. Надалі вважаємо, що на виході первинного перетворювача отримуємо електричні відображення коливань без спотворення або з мінімальними спотвореннями форми [2]. Тоді отримані результати зміни амплітудно-частотних параметрів переміщень на поверхні твердого тіла справедливі і для відповідних сигналів АЕ.

Нами виконано числові розрахунки ширини смуги частот та домінуючої частоти пружних хвиль АЕ для випадку розкриття тріщини відриву у конструкційних сталях 38ХНЗМФА та 45. Вихідні дані: сталь 38ХНЗМФА:  $E = 210$  ГПа;  $G = 83$  ГПа;  $\rho = 7900$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 0,265$ ;  $c_2 = 3241$  м/с; сталь 45:  $E = 200$  ГПа;  $G = 78$  ГПа;  $\rho = 7826$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 0,282$ ;  $c_2 = 3157$  м/с. Параметри тріщини:  $a = 5 \times 10^{-3}$  м;  $d = 2a$ ;  $r^* = 8a$  (див. рис. 2). Результати обчислень відображено у табл. 1.

Таблиця 1

**Залежність частотних параметрів пружних хвиль АЕ від розмірів дископодібної тріщини для різних конструкційних матеріалів**

Радіус тріщини	Ширина смуги частот		Значення домінуючої частоти	
	$\Delta f_r$ , кГц	$\Delta f_3$ , кГц	$f_{\max}^r$ , кГц	$f_{\max}^3$ , кГц
a	186 / 181	186 / 181	258 / 251	206 / 201
2a	134 / 131	165 / 161	165 / 161	114 / 111
4a	83 / 81	103 / 100	145 / 141	105 / 100

Примітка: у чисельнику значення для сталі 38ХНЗМФА; у знаменнику – для сталі 45

Вони показали, що із збільшенням розмірів тріщини ширина смуги частот звужується, а значення домінуючої частоти зміщується у сторону нижчих частот. Водночас, що більша тріщина, то більших значень набувають переміщення на поверхні півпростору, тобто амплітуди сигналів АЕ зростають.

### Висновки

За отриманими розв'язками тривимірної динамічної задачі для пружного півпростору, послабленого дископодібною тріщиною відриву, встановили, що характер коливань поверхні півпростору залежить від розмірів тріщини. Коливання мають осцилюючий характер, із поступовим зниканням.

За умови збільшення розмірів тріщини зростають амплітуди коливань точок поверхні півпростору, звужується ширина смуги частот та зменшується значення частоти, за якої коливання досягають максимальних амплітуд. Використання отриманих результатів під час АЕ-діагностування дозволяє встановити характер руйнування у конструкційному матеріалі, що водночас сприяє підвищенню ефективності оцінки залишкового ресурсу об'єкта контролю.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андрейків, О. Є. Теоретичні основи методу акустичної емісії в механіці руйнування [Текст] / О. Є. Андрейків, В. Р. Скальський, Г. Т. Сулим. – Львів: Сполом, 2007. – 479 с.
2. Назарчук, З. Т. Акустико-емісійне діагностування елементів конструкцій: наук.-техн. посіб. у 3 т. – Т. 1: Теоретичні основи методу акустичної емісії [Текст] / З. Т. Назарчук, В. Р. Скальський. – К.: Наукова думка, 2009. – 287 с.
3. Билек, З. Излучение волн напряжений при страгивании трещины методом конечных элементов [Текст] / З. Билек // Проблемы прочности. – 1980. – № 6. – С. 23–25.
4. Alterman, Z. The vibration of elastic plane and half plane due to the sudden appearance of a crack [Текст] / Z. Alterman, R. Burridge, D. Loewenthal // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. – 1971. – 24, № 1/2. – P. 239–259.
5. Скальський, В. Р. Визначення переміщень на поверхні півпростору, спричинених утворенням внутрішньої тріщини скруту [Текст] / В. Р. Скальський, О. М. Станкевич // Вісник ДНУЗТу ім. академіка В. Лазаряна. – Вип. 33. – Дніпропетровськ, 2010. – С. 255–258.
6. Грилицький, М. Д. Зведення задачі про взаємодію тріщин у защемленому півпросторі до крайових інтегральних рівнянь [Текст] / М. Д. Грилицький, І. П. Лаушник, О. М. Станкевич // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2003. – № 1. – С. 71–76.

7. Хай, М. В. Фундаментальний розв'язок квазістатичної задачі для півпростору з плоскими тріщинами [Текст] / М. В. Хай, В. З. Станкевич // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2002. – № 3. – С. 25–28.
8. Хай, М. В. Определение перемещений на поверхности тела, обусловленных разрывами сплошности среды [Текст] / М. В. Хай, В. З. Станкевич // Прикладная механика. – 1994. – № 30. – С. 25–33.
9. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики [Текст] / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
10. Кит, Г. С. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами [Текст] / Г. С. Кит, М. В. Хай. – К.: Наукова думка, 1989. – 288 с.

Надійшла до редколегії 26.06.2012.  
 Прийнята до друку 09.07.2012.

В. Р. СКАЛЬСКИЙ, Е. М. СТАНКЕВИЧ (Физико-механический институт имени Г. В. Карпенка НАНУ, Львов), В. З. СТАНКЕВИЧ (Львовский научно-исследовательский институт судебных экспертиз), Ю. Я. МАТВИИВ (Луцкий национальный технический университет)

## **АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ ОТРЫВА**

Представлено решение динамической задачи определения волнового поля перемещений на поверхности полупространства, обусловленного раскрытием внутренней трещины отрыва. На основе решений граничных интегральных уравнений показан характер изменения амплитудно-частотных характеристик упругих колебаний на поверхности твердого тела в зависимости от размеров дефекта.

*Ключевые слова:* трещина отрыва, упругие колебания, граничные интегральные уравнения

V. SKALSKY, E. STANKEVYCH (Karpenko Physico-Mechanical Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv), V. STANKEVYCH (Lviv Research Forensic Institute), YU. MATVIIV (National Technical University of Luck)

## **SPECTRAL CHARACTERISTICS OF SURFACE ELASTIC OSCILLATIONS OF HALF-SPACE WEAKENED BY A MODE I PENNY-SHAPED CRACK**

The solution of a dynamic problem for calculation of displacement field caused by internal mode I crack opening is presented. Based on boundary integral equations solutions it was revealed that a spectral characteristics of half-space surface elastic oscillations depend on defect sizes.

*Keywords:* a crack of mode I, an elastic oscillations, a boundary integral equations method