УДК 624.042.8:629.73

В. Е. АРТЕМОВ, А. С. РАСПОПОВ (ДИИТ)

К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ В РАСЧЕТАХ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В работе рассмотрены основные факторы, которые приводят к появлению погрешностей в расчетах строительных конструкций. Перечислены недостатки и преимущества различных методов решения линейных алгебраических систем уравнений.

Ключевые слова: строительная конструкция, расчет, точность, погрешность, метод конечных элементов

Как правило, при получении традиционного технического образования будущие инженеры привыкают к мысли, что числовые данные, которыми они оперируют в своих расчетах, являются величинами абсолютно или достаточно точными [1]. Нередко эта убежденность сохраняется и в профессиональной деятельности, например, при проектировании строительных конструкций. Восполнить этот пробел в образовании представляется возможным путем введения в программу подготовки студентов специальных курсов математического анализа и вычислительных методов, ориентированных больше на инженеров, чем на математиков. Как отмечает профессор В. В. Кулябко, решением в сложившейся ситуации может стать и более строгое разделение строительных специальностей – например, на инженеров по расчету конструкций в САПР, инженеров по учету динамических воздействий и т. п. [2].

Обратим внимание на реальные проблемы, с которыми может столкнуться специалист по расчету строительных конструкций. Численным результатом любого алгоритма всегда является приближенное значение, точность которого должна быть оценена самим расчетчиком. Перечислим основные факторы, приводящие к появлению погрешностей в вычислениях [3]:

– математическая модель является приближенным описанием реального процесса;

– исходные данные к задаче, полученные экспериментально (измерения), уже содержат погрешности, либо они являются результатом решения некоторых вспомогательных задач (например, в нелинейных задачах динамики сооружений);

– применяемые для решения задач методы, как правило, являются приближенными;

– арифметические операции выполняются компьютерной системой исключительно над округленными числами, т. е. с ограниченной разрядностью.

Перечисленные факторы имеют место при математическом моделировании любого физического процесса или явления. Рассмотрим их с позиции моделирования работы искусственного сооружения.

Проектирование строительных конструкций, зданий и сооружений является достаточно консервативной областью инженерной деятельности. Последние несколько десятилетий в силу стремительного развития компьютерных технологий абсолютным лидером среди методов расчета инженерных конструкций стал метод конечных элементов. Несправедливо утверждать, что этот численный метод анализа на сегодняшний день практически не развивается. Поводом для рассуждений о «тупиковости» этого метода часто служит практически полная изоляция пользователей САПР (инженеров) от разработчиков (ученых, программистов). Подтверждением того, что метод конечных элементов совершенствуется, следует считать ряд научных работ [4–6]. Так, одним из перспективных направлений в области численного анализа конструкций следует считать внедрение новой категории конечных элементов – так называемых «p-элементов», позволяющих представить кривизну дискретизируемой поверхности и особенность поля напряжений с заданной точностью без изменения густоты конечно-элементной сетки (реализованы в программах *Nastran*, *StressCheck*) [1].

Однако, как и любой другой численный метод, метод конечных элементов является приближенным методом анализа. Так, континуальная область пространства подлежит дискретизации конечномерным числом объектов. Это число, в свою очередь, определяет количество канонических уравнений (порядок расчетных матриц) метода. В дополнение, канонические уравнения МКЭ решаются известными численными методами, которые также являются приближенными (например, метод Гаусса, *LU*-разложение матриц и т. п.).

Важно отметить, что от выбора метода решения системы уравнений зависит не только точность, но и скорость расчета. Если интерпретировать метод конечных элементов как развитие метода перемещений, то в самом простом случае имеет место система линейных алгебраических уравнений вида:

$$Cz = F, \quad (1)$$

где C – общая матрица жесткости системы; z – искомый вектор узловых перемещений, который соответствует невырожденной матрице C; F – вектор узловых усилий от внешних нагрузок и воздействий.

Перечислим наиболее распространенные способы решения системы (1):

– метод Гаусса со схемой единственного деления (метод последовательного исключения неизвестных);

– метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу (схема частичного выбора);

– метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице (схема полного выбора);

– *LU*-разложение матриц;

– метод Холецкого (метод квадратных корней).

Как показывает анализ, реализация метода Гаусса по схеме единственного деления для системы размерности n предполагает проведение $\frac{2}{3}n^3$ арифметических операций на этапе прямого хода и еще n^2 операций – на этапе обратного [3]. Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу целесообразно применять для расчета небольших стержневых систем, в которых количество узлов конечно-элементной сетки относительно невелико; в противном случае, схема частичного выбора может оказаться плохо обусловленной, и возможна существенная потеря точности.

Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице допускает нарушение естественного порядка исключения неизвестных, что является его алгоритмическим преимуществом. Для хорошо обусловленных систем, т. е. при расчете строительных конструкций с относительно плавным изменением жесткостей элементов, этот вариант метода Гаусса является вполне приемлемым. Однако помимо $\frac{2}{3}n^3$ действий для его реализации необходимо провести еще $\frac{1}{3}n^3$ операций сравнения элементов, что может существенно замедлить процесс решения задачи на ЭВМ.

Метод *LU*-разложения состоит из двух основных этапов и дает возможность проведения первого, наиболее ресурсоемкого этапа, без информации о правой части системы уравнений. Таким образом, основную часть вычислений можно выполнить еще на этапе формирования конечно-элементной сетки, т. е. до перехода к этапу нагружения системы.

Метод Холецкого (реализован в программном комплексе *Scad*) справедлив для симметричных положительно определенных матриц коэффициентов, какими и являются матрицы жесткости C (1). Метод гарантированно устойчив, а количество арифметических операций составляет примерно $\frac{1}{3}n^3$, что является его преимуществом по сравнению с методом Гаусса.

Как правило, в научной и учебной литературе по строительной механике вектор неизвестных метода перемещений предлагается отыскивать, преобразовав систему (1):

$$z = LF, \quad (2)$$

где $L = C^{-1}$ – матрица податливости системы.

Математическая корректность выражения (2) не вызывает сомнений. Однако, в своей работе авторы [3] указывают на то, что при проведении численного эксперимента на ЭВМ вычисление обратных матриц оправдано только в том случае, если далее планируется анализ их свойств. Так, для обращения матрицы в системе уравнений (2) необходимо выполнить примерно $2n^3$ арифметических операций, что почти в 3 раза больше по сравнению с методом Гаусса. Следовательно, вычисление вектора узловых перемещений через матрицу податливости системы по соображениям скорости расчета становится малопригодным.

В нелинейных (пошаговых) расчетах вычисление обратных матриц также не дает заметных преимуществ. Идея одноразового вычисления матрицы податливости и ее сохранение в памяти компьютера для дальнейшего многократного использования, на первый взгляд, выглядит привлекательно, однако, как показывает опыт, *LU*-разложение матрицы жесткости системы позволяет вычислять вектор узловых перемещений столь же быстро, а предварительная работа на этапе разложения дает экономию времени примерно в 3 раза.

Аналогично ситуация обстоит и с вычислением определителей матриц. Исследования показывают, что основанные на их использовании алгоритмы оказываются крайне неэффективными, поэтому вычисление определителей уже давно не является этапом современных вычислительных алгоритмов [3].

Важным аспектом в реализации алгоритма расчета строительной конструкции является и тот факт, что ЭВМ оперирует с ограниченным набором рациональных чисел. Иррациональные числа, в том числе различные константы, используемые в научных расчетах (π, e и пр.) – отсутствуют. Это ограничение приводит к тому, что множество чисел (перемещения, усилия, напряжения) на ЭВМ могут быть представлены только приближенно, с ошибкой округления. Тогда, вероятно, далеко не все интересующие расчетчика величины получат точные значения.

Рассмотрим для примера простой случай. Пускай предполагается, что сечение балочного элемента конструкции по проекту должно быть прямоугольным с размерами $b = 0{,}1$, $h = 1{,}0$. Если считать эти числа точными (с математической точки зрения – такими, абсолютная погрешность которых стремится к нулю), то площадь поперечного сечения составит $A = bh = 0{,}1$. Поскольку в компьютере реализована двоичная система счисления, то число 0,1 согласно этой системы является бесконечной периодической дробью $0{,}1 = (0{,}000110011\ldots)_2$ и представляется приближенно, в зависимости от установленной машинной точности.

Отметим, что в большинстве современных программ по расчету строительных конструкций отсутствуют средства для анализа точности решения. Поэтому развитие программных инструментов, позволяющих вычислять абсолютные и относительные погрешности величин, оценивать степень обусловленности системы, определять невязки за счет округления чисел является перспективной и актуальной задачей численного анализа строительных конструкций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Перельмутер, А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа [Текст] / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. - М.: ДМК Пресс. - 2007. - 600 с.
2. Кулябко, В. В. Динамика металлических конструкций и проблемы строительства, науки и образования [Текст] / В. В. Кулябко // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. - 2008. - № 10. - С. 12–20.
3. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров [Текст] / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. - М.: Высш. шк. - 1994. - 544 с.
4. Chen, Z. Finite Element Methods and Their Applications [Text] / Z. Chen. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg. - 2005. - 410 p.
5. Zimmerman, W. B. J. Process Modelling and Simulation with Finite Element Methods [Text] / W. B. J. Zimmerman. - World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. - 2004. - 382 p.
6. Frey, P. J. Mesh Generation. Application to Finite Elements [Text] / P. J. Frey, P.-L. George. - Hermes Science Europe Ltd. - 2000. - 814 p.

Поступила в редколлегию 09.07.2012.
Принята в печать 30.07.2012.

В. Є. АРТЬОМОВ, О. С. РАСПОПОВ (ДІІТ)

ДО ПИТАННЯ ПРО ТОЧНІСТЬ РОЗРАХУНКІВ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

В роботі розглянуто основні фактори, які призводять до появи похибок у розрахунках будівельних конструкцій. Перелічено недоліки і переваги різних методів розрахунку лінійних алгебраїчних систем рівнянь.

Ключові слова: будівельна конструкція, розрахунок, точність, похибка, метод скінчених елементів

V. ARTOMOV, A. RASPOPOV (Dniepropetrovsk National University of Railway Transport)

TO THE QUESTION ON ACCURACY OF CALCULATION BUILDING CONSTRUCTIONS

In the article major factors which lead to occurrence of errors in calculations of building designs are considered. Shortages and advantages of various methods of solution of linear algebraic sets of equations are enumerated.

Keywords: engineer structure, solution, accuracy, error, finite element method