

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ПОЗАЦЕНТРОВО СТИСНЕНОГО СКЛАДЕНОГО СТЕРЖНЯ

В публікації надано рішення задачі стійкості стисненого стержня з використання моделі у вигляді шаруватої системи. Стержні шаруватої балки з'єднані пружними дискретними опорами (планками) або пружним шаром.

Ключові слова: стійкість, стиснений стержень, балка, дискретна опора

В публикации приведено решение задачи устойчивости сжатого стержня с использованием модели в виде слоистой системы. Стержни слоистой балки соединены упругими дискретными опорами (планками) или упругим слоем.

Ключевые слова: устойчивость, сжатый стержень, балка, дискретная опора

In a publication the decision of task of stability of the compressed bar is resulted with the use of model as the stratified system. The bars of the stratified beam are connected by resilient discrete supports (by slats) or resilient layer.

Keywords: stability, compressed bar, beam, discrete supports

В роботах [1, 2] отримано рішення для вільних коливань шаруватої балки на пружних опорах (або пружній основі), де пружність шару між балками може бути різною, але однаковою по кожному окремому шару. При цьому кожна балка стиснена або розтягнута прикладеними поздовжніми силами (при необхідності

такі сили можуть не діяти на якусь окрему балку).

Власні коливання

Розрахункова схема для шаруватої моделі має вигляд (рис. 1) та наступні рівняння для вільних коливань: дискретні пружні опори (1) та пружний шар (20).

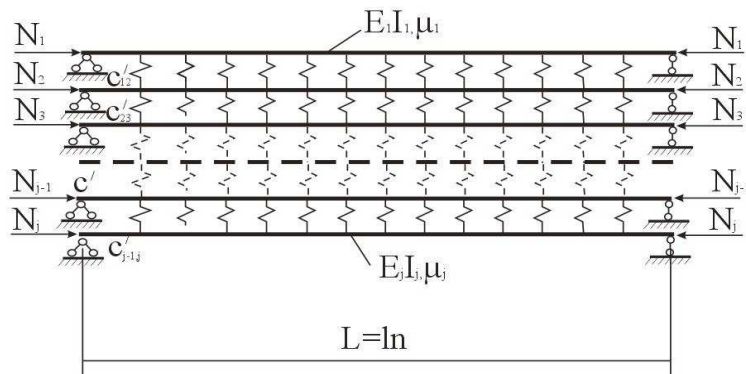


Рис. 1. Розрахункова модель

Система рівнянь при дискретних пружних опорах має вигляд: (1)

$$\frac{\operatorname{sh} d_{ij}}{d_{ij}(\operatorname{ch} d_{ij} - \cos \beta_i)} - \frac{\sin \alpha_{ij}}{\alpha_{ij}(\cos \alpha_{ij} - \cos \beta_i)} = \frac{\alpha_{ij}^2 + d_{ij}^2}{C'_j},$$

$$C'_j = \frac{\left[C_{j-1,j} \left(\frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{\alpha_j} \right) + C_{j,j+1} \left(\frac{\alpha_j - \alpha_{j+1}}{\alpha_j} \right) \right] \cdot \ell^3}{2E_j J_j}$$

$j = 1, 2, 3, \dots, k.$ (1)

Таким чином, коливання пакету балок може бути описане системою рівнянь, що мають $(k-1)$ невідому α_j ($\alpha_1 = 1, 0$) та k невідомих частотного параметра λ_{ij} для кожної i -тої форми коливань.

Оскільки ми шукаємо нормальні форми, то коливання у цьому випадку передбачаються одночастотними, тобто має місце рівність $\omega_{i1} = \omega_{i2} = \omega_{i3} = \dots = \omega_{ik}$, а між частотними параметрами встановлюється залежність:

$$\lambda_{ij}^4 = \frac{\mu_j \omega_{ij}^2 \ell^4}{E_j J_j}; \quad \lambda_{ij}^4 = \lambda_{i1}^4 \Phi_j; \quad \lambda_{i1}^4 = \frac{\mu_1 \omega_{i1}^2 \ell^4}{E_1 J_1};$$

$$\Phi_j = \frac{\lambda_{ij}^4}{\lambda_{i1}^4} = \frac{\mu_j E_1 J_1}{\mu_1 E_j J_j}.$$

З врахуванням цих залежностей та співвідношень, система рівнянь дає можливість отримати всі $(k-1)$ співвідношення амплітуд α_j та частотний параметр λ_{i1} і далі частоту

$$\left(\omega_i = \lambda_{i1}^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\mu \ell^2}} \right).$$

При зв'язках між шарами у вигляді пружного шару система рівнянь значно спрощується та має вигляд (2)

$$\frac{2d_{ij}}{(d_{ij}^2 + \beta_i^2) f_{ij}} + \frac{2\alpha_{ij}}{(\alpha_{ij}^2 - \beta_i^2) k_{ij}} = \frac{k_{ij} \alpha_{ij} + f_{ij} d_{ij}}{C'_j}$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, k. \quad (2)$$

Рішення даної системи рівнянь приводить у загальному випадку до поліному виду

$$\sum_{m=0}^{m=2k} \lambda_{ij}^{4m} \cdot \Phi_m = 0, \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots, 2k).$$

Стійкість

Рішення для дослідження стійкості отримані з застосуванням динамічного підходу, коли при втраті стійкості частота дорівнює нулю. Рішення отримано для шаруватої балки, що навантажена поздовжніми силами (сили розтягу або стиску). Шари між собою з'єднані пружним шаром, але можуть бути з'єднані і дискретними пружними опорами (так само як і при вільних коливаннях).

Застосування даної моделі для дослідження стійкості позацентрово стиснутих стержнів або складених стержнів та для відпрацювання коректної розрахункової моделі розглянуті в першу чергу для складеного стержня, як однієї з шаруватих моделей.

Складені стержні, що утворені з двох (або більше) окремих гілок зв'язаних між собою планками або решіткою, мають меншу жорсткість ніж суцільні. Проміжок між гілками складеного стержня називають швом. По своїй роботі у складеному стержні в'язі поділяють на два види: в'язі зсуву (сприймають зусилля зсуву) та поперечні в'язі (перешкоджають відриву або притисканню стержнів один до одного). Загальна жорсткість на згин складеного стержня, що не має в'язів зсуву, дорівнює сумі гілок складеного стержня.

Решітка сприймає дію поперечної сили. Критична сила складеного шарнірно-спертого стержня за А. Ф. Смирновим становить

$$P_{кр} = P_e \cdot \frac{1}{1 + \gamma \cdot P_e};$$

$$\gamma_n = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{1}{A_p \cdot \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{A_d \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha} \right);$$

$$\gamma_n = \frac{d \cdot b}{12EI_p} + \frac{d^2}{24EI_c} \quad (3)$$

Тут введено наступні позначення: $P_{кр}, P_e, \gamma, A_p, A_d, \alpha, I_p, I_c, \gamma_p, \gamma_n$, які відповідно є: критична сила для складеного стержня, критична Ейлерова сила для суцільного стержня, одиничний кут зсуву від поперечної сили $Q=1$, площа перерізу двох розпірок, площа перерізу двох розкосів, кут нахилу розкосу до осі, момент інерції двох планок, момент інерції однієї гілки стійки відносно її осі, одиничний кут зсуву від поперечної сили $Q=1$ для решітки, одиничний кут зсуву від поперечної сили $Q=1$ для планок.

При дослідженні складених стержнів достатньо обчислити пружність проміжної опори, якими в даному випадку є планки, що з'єднують стержні. Нескладно далі перейти до пружного шару «розмазавши» пружність опори по довжині, яка дорівнює відстані між пружними опорами (планками).

У цьому випадку ми маємо тришарову балку, де між двома стержнями (балками) розташовані дискретні пружні опори або пружний шар.

Системи рівнянь, отримані з рівнянь (1) та (2) при $\omega_i = 0$, приймають наступний вигляд для стійкості стислого «чистого модульного» стержня

$$\frac{1}{1 - \cos \beta_i} - \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i (\cos \alpha_i - \cos \beta_i)} = \frac{\alpha_i^2}{c'}, \quad (4)$$

$$d_{ij} = 0, \quad \alpha_i^2 = \frac{N_j l^2}{E_l I_j} = f(c', n, i),$$

$$(k_{ij} = \alpha_{ij}, d_{ij} = f_{ij}).$$

Аналогічно для розтягнутої балки (стержня) умови та рівняння мають вигляд:

$$\frac{\operatorname{sh} d_{ij}}{d_{ij} (\operatorname{ch} d_{ij} - \cos \beta_i)} - \frac{1}{1 - \cos \beta_i} = \frac{d_{ij}^2}{c'} \quad (5)$$

$$\alpha_{ij} = 0, \quad d_{ij}^2 = \frac{N_j \ell^2}{E_j I_j} = f(c', n, i), \quad (k_{ij} = a_{ij}, d_{ij} = f_{ij}).$$

які дійсні для форм втрати стійкості $i = 1, 2, 3 \dots n-1$. «Чистим модульним» стержнем називаємо стержень, при дослідженні власних коливань або стійкості якого не враховуються такі фактори як інерція оберту, деформації зсуву. Вплив даних факторів буде досліджено додатково після дослідження рішень для «чистого модульного» стержня.

Для балок, що зв'язані пружним шаром, рівняння для розтягнутої та стислої балки знаходимо шляхом граничного переходу і вони мають простий вигляд

$$2c'_j + \alpha_{ij}^2 \beta_i^2 + \beta_i^4 = 0, \quad (6)$$

$$2c'_j - d_{ij}^2 \beta_i^2 + \beta_i^4 = 0. \quad (7)$$

Для переходу до моделі позацентрово стисненого складеного стержня приймаємо кількість балок – 2, що з'єднані між собою пружним шаром, але стискальна сила прикладена не центрово, а зі зміщенням.

Скористаємось для цього рівнянням (6) та залежністю (2), що дає змогу зв'язати балки між собою. У розгорнутому вигляді система рівнянь буде мати наступний вигляд

$$\left[c_{j-1,j} \left(\frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{\alpha_j} \right) + c_{j,j+1} \left(\frac{\alpha_j - \alpha_{j+1}}{\alpha_j} \right) \right] \cdot \ell^3 + \frac{E_j J_j}{E_j I_j} \cdot \frac{\pi^2 \cdot i^2}{n^2} + \frac{\pi^4 \cdot i^4}{n^4} = 0 \quad (8)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots n-1, \quad j = 1, 2$$

У даному виразі введені наступні позначення: c – жорсткість пружного шару між двома балками, кН/м; j – номер балки; i – номер форми втрати стійкості; n – кількість прогонів балки (кількість відстаней між планками); α – коефіцієнт розподілу амплітуд; ℓ – відстань між дискретними опорами, м; N – стискальна сила, що діє на балку, кН; E – модуль пружності балки, кН/м²; I – момент інерції балки, м⁴.

Проаналізуємо наступний випадок. Колона, що складена з двох паралельних гілок, які з'єднані між собою планками, навантажена центрово, а потім стискальна сила зміщується у бік однієї з гілок, тобто стискальна сила розподіляється між стійками нерівномірно.

Система рівнянь у цьому випадку буде мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} \left[\frac{c_{1-2} (1 - \alpha_2)}{E_1 J_1} \right] \cdot \ell^3 - \frac{N_1 \ell^2}{E_1 I_1} \cdot \frac{\pi^2 \cdot i^2}{n^2} + \frac{\pi^4 \cdot i^4}{n^4} = 0 \\ \left[c_{1-2} \left(\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2} \right) \right] \cdot \ell^3 - \frac{N_2 \ell^2}{E_2 I_2} \cdot \frac{\pi^2 \cdot i^2}{n^2} + \frac{\pi^4 \cdot i^4}{n^4} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Введемо позначення: $\frac{c \cdot \ell^3}{EI} = c'$; $\frac{N \ell^2}{EI} = \alpha^2$;

$$\frac{\pi \cdot i}{n} = \beta$$

Система рівнянь з врахуванням позначень має дві невідомі α_1^2 та α_2

$$\begin{cases} c'_1 \cdot (1 - \alpha_2) - \alpha_1^2 \cdot \beta^2 + \beta^4 = 0 \\ c'_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2} \right) - \alpha_2^2 \cdot \beta^2 + \beta^4 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

З першого рівняння знаходимо α_2 і підставляємо у друге. Отримуємо квадратне рівняння для параметра критичної сили у такому вигляді

$$(c'_1 + c'_2) - \frac{c'_2 \cdot \alpha_1^2 + c'_1 \cdot \alpha_2^2}{\beta^2} - \beta^2 \cdot (\alpha_2^2 + \alpha_1^2) + \alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2 + \beta^4 = 0 \quad (11)$$

Для отримання рівняння з одним невідомим, виразимо відносну жорсткість проміжного шару (c') та параметр критичної сили (α^2) другої балки (стержня) через першу

$$c'_2 = c'_1 \cdot \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} = c'_1 \cdot m;$$

$$\alpha_2^2 = \alpha_1^2 \cdot \frac{N_2 E_1 I_1}{N_1 E_2 I_2} = \alpha_1^2 \cdot k^2 \quad (12)$$

Рівняння (10) вирішується відносно $\alpha_1^2 = \frac{N_1 \ell^2}{E_1 I_1}$ і має остаточний вигляд

$$(c'_1 + c'_1 \cdot m) - \frac{c'_1 \cdot m \cdot \alpha_1^2 + c'_1 \cdot \alpha_1^2 \cdot k^2}{\beta^2} - \beta^2 \cdot (\alpha_1^2 \cdot k^2 + \alpha_1^2) + \alpha_1^4 \cdot k^2 + \beta^4 = 0 \quad (13)$$

За даним рівнянням можна розраховувати складені стержні (балки, стояки), які мають однакові або різні за матеріалом та поперечним перерізом стояки, що з'єднані гнучкими в'язями. Крім того, можна задаватись різними

стискальними силами, що на практиці часто буває, коли порушується центрове прикладання сили.

Оскільки у більшості випадків стояки колон мають однаковий переріз та виготовлені з одного матеріалу: $c'_2 = c'_1 = c'$ ($m=1$); $k^2 = \frac{N_2}{N_1}$, запишемо рівняння (11) таким чином (при $\alpha_1^2 = X$)

$$X_{1,2} = \frac{\left(\frac{(1+k^2) \cdot (c' + \beta^4)}{\beta^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{(1+k^2) \cdot (c' + \beta^4)}{\beta^2}\right)^2 - 4 \cdot k^2 \cdot (2c' + \beta^4)}}{2k^2} \quad (15)$$

Приклад 1. Стояк має переріз з двох двотаврів, що з'єднані між собою планками, утворюючи складений стержень. Загальна довжина стержня 10 м, планки розміщені через 2,0 м. ($\ell = 2,0$ м). Двотавр № 18 має момент інерції у площині $I_y = 82,6$ см⁴ (момент інерції двох гілок 165,2 см⁴).

Відносну жорсткість приймаємо $c'_1 = 10$, що відповідає жорсткості планок

$$c'_1 = \frac{c \cdot \ell^3}{E_1 I_1}; \quad c = c'_1 \cdot \frac{E_1 I_1}{\ell^3} = 433,65 \text{ кН/м.}, \quad n = 5.$$

Форма втрати стійкості перша: $i = 1$.

За формулою (15) маємо для параметра критичної сили два рішення $X_1 = 53,167$; $X_2 = 0,3944$.

Приймаємо менше значення i за формулою

$$X_2 = a_1^2 = \frac{N_1 \cdot \ell^2}{E_1 I_1} = 0,3944,$$

знаходимо $N_{1кр} = 34,205$ кН.

Якщо по звичайній формулі обчислити Ейлерову силу, то вона становить 342,05 кН, тобто різниці немає. Це обумовлено тим, що відносна жорсткість проміжного шару (планок) прийнята значною. Якщо скористатись формулою А. Ф. Смирнова [4]

$$P_{кр} = P_e \cdot \frac{1}{1 + \gamma_n \cdot P_e}, \quad \gamma_n = \frac{d \cdot b}{12EI_p} + \frac{d^2}{24EI_c},$$

то коефіцієнт γ_n за даними розрахунків становить 0,00000142 і з його врахуванням повторний розрахунок дає уточнення до критичної сили по формулі (3) $P_{кр} = 32,856$ кН.

Як видно різниця становить 3,94 %.

$$k^2 \cdot X^2 - X \cdot (1 + k^2) \cdot \left(\frac{c' + \beta^4}{\beta^2}\right) + 2c' + \beta^4 = 0 \quad (14)$$

З даного рівняння безпосередньо отримуємо рішення для параметру стискальної сили, задаючись параметром відносної жорсткості з'єднувальних планок (c')

Позацентрове прикладання стискальної сили здійснено коефіцієнтом k^2 , який показує частку навантаження яку сприймає друга гілка у зрівнянні з першою (він може бути менше одиниці і більше).

Для того ж самого складеного стержня при $k^2 = 0,81$ ($k = 0,9$) при тих же перерізах, для критичної сили отримуємо значення $N_{1кр} = 29,445$ кН. Як видно, при зміщенні центру прикладення стискальної сили, критична стискальна сила зменшилась на 12,3 %, а при $k^2 = 0,64$ ($k = 0,8$) на 41,8 % ($N_{1кр} = 19,471$ кН).

При зменшенні відстані між планками ($\ell = 1$ м), у формулі (15) іншими будуть значення β^2, β^4 та c' ($c'_1 = 1,25$). Розрахунки дають для параметра критичної сили $X_2 = 0,0985$ і саму критичну силу $N_{1кр} = 34,117$ кН, яка практично співпадає з обчисленою раніше ($N_{1кр} = 34,205$ кН).

У табл. 1. наведені дані розрахунку зміни критичної сили від ексцентриситету її прикладання.

Це досягається зміною розподілу відношення навантаження (яке є постійним для стержня в цілому) між гілками складеного стержня за допомогою коефіцієнта k^2 .

Результати розрахунків свідчать, що при поступовому перенесенні більшої частки навантаження на одну з двох гілок складеного стержня, критична сила поступово зменшується.

Більш доцільним варіантом розрахунків складених стержнів на стійкість на практиці однак є інший. Задаючись параметром стискальної сили, отримуємо рішення для відносної жорсткості з'єднувальних планок, які необхідно поставити, щоб балка (колона) не втрачала стійкості.

Результати розрахунку критичної сили (кН)

k	k^2	α_1^2	$N_{кр}$	k	k^2	α_1^2	$N_{кр}$
1,0	1,0	0,3944	34,205	0,5	0,25	0,1465	12,706
0,9	0,81	0,3395	29,445	0,4	0,16	0,1045	9,063
0,8	0,64	0,2961	25,681	0,3	0,09	0,0575	4,987
0,7	0,49	0,2525	21,899	0,2	0,04	0,0292	2,532
0,6	0,36	0,2005	17,389	0,1	0,01	0,0011	0,095

Отримуємо рішення для відносної жорсткості проміжного шару

$$c'_1 = \frac{(\beta^4 \cdot \alpha_1^2 \cdot (1+k^2) - \alpha_1^4 \cdot \beta^2 \cdot k^2 - \beta^6)}{2\beta^2 - \alpha_1^2 \cdot (1+k^2)} \quad (16)$$

підстановка у формулу (16) параметрів попереднього прикладу дає очікуваний результат $c'_1 = 10$ (при $k^2 = 1$).

У випадку, якщо проміжні опори приймаємо дискретними, скористаємось системою рівнянь типу (5), і далі отримуємо аналогічне рівняння, застосувавши наведені вище співвідношення

$$\frac{1}{1 - \cos \beta_i} - \frac{\sin k \alpha_1}{\alpha_1 k (\cos k \alpha_1 - \cos \beta_i)} = \frac{\alpha_1^2 \cdot k^2}{c'_1 \cdot m \cdot \left(1 - \frac{\left(\frac{1}{1 - \cos \beta_i} - \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1 \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \beta_i)}\right) \cdot c'_1}{\left(\frac{1}{1 - \cos \beta_i} - \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1 \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \beta_i)}\right) \cdot c'_1 - \alpha_1^2}\right)} \quad (18)$$

Для прикладу, наведеного вище (при $k^2 = 1$, $m = 1$, $c'_1 = 10$, $\cos \beta_1 = 0,80901$) отримуємо значення параметру критичної сили $\alpha_1 = 0,62217$ і критичну силу ($N_{кр} = 34,218$ кН).

Даний приклад і розрахунок підтверджує можливість застосування більш простих рішень, замінюючи дискретні пружні опори (планки) складеного стержня пружним шаром. У цьому випадку маємо систему простих алгебраїчних рівнянь (10) і безпосередньо рішення (15) для параметра критичної сили. З розрахунків видно, що гілки складеного стержня працюють разом і коефіцієнт розподілу амплітуд α_2 у випадках, коли $k^2 = 1$ також дорівнює 1.

$$\alpha_2 = \frac{\beta^4 - \alpha_1^2 \cdot \beta^2 + c'_1}{c'_1} = \frac{0,155538 - 0,39438 \cdot 0,3944 + 10}{10} = 1$$

$$c'_2 = c'_1 \cdot \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} = c'_1 \cdot m; \quad \alpha_2^2 = \alpha_1^2 \cdot \frac{N_2 E_1 I_1}{N_1 E_2 I_2} = \alpha_1^2 \cdot k^2.$$

$$\frac{1}{1 - \cos \beta_i} - \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1 (\cos \alpha_1 - \cos \beta_i)} = \frac{\alpha_1^2}{c'_1 \cdot (1 - \alpha_2^2)}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{1 - \cos \beta_i} - \frac{\sin k \alpha_1}{\alpha_1 k (\cos k \alpha_1 - \cos \beta_i)} = \frac{\alpha_1^2 \cdot k^2}{c'_1 \cdot m \cdot \left(\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}\right)},$$

Дана система має дві невідомі α_2 та α_1 і розв'язується звичайним способом. Зведена до виразу, де є тільки одна невідома α_1 , формула має вигляд:

Додатково проаналізуємо як змінюється коефіцієнт розподілу амплітуд у залежності від стискальної сили ($N_{1(кр)}$) та коефіцієнту відношення стискальних сил (k^2) за даними таблиці 1.

Розрахунок провадимо за формулою $\alpha_2 = \frac{\beta^4 - \alpha_1^2 \beta^2 + c'_1}{c'_1}$. Дані розрахунку зведені у табл. 2.

Як видно, оскільки пружний шар достатньо жорсткий, то даний коефіцієнт змінюється незначно.

З формули видно, що суттєво він буде змінюватись при малій пружності проміжного шару, оскільки значення параметрів у чисельнику будуть мати один порядок.

Наприклад, при $c'_1 = 1,25$ $\alpha_1^2 = 0,0985$, $\alpha_2 = 1,0933$, а при $c'_1 = 0,1$ $\alpha_1^2 = 0,0273$, $\alpha_2 = 2,4477$.

Результати розрахунку коефіцієнту розподілу амплітуд

k	k^2	α_1^2	$N_{кр}$	α_2	k	k^2	α_1^2	$N_{кр}$	α_2
1,0	1,0	0,3944	34,205	1,000	0,5	0,25	0,1465	12,706	1,0105
0,9	0,81	0,3395	29,445	1,002	0,4	0,16	0,1045	9,063	1,0114
0,8	0,64	0,2961	25,681	1,003	0,3	0,09	0,0575	4,987	1,0132
0,7	0,49	0,2525	21,899	1,005	0,2	0,04	0,0292	2,532	1,0144
0,6	0,36	0,2005	17,389	1,007	0,1	0,01	0,0011	0,095	1,0155

Для дослідження впливу інерції оберту та зсуву на стійкість запишемо систему рівнянь для вільних коливань, аналогічну (10), але з врахуванням саме цих факторів. З врахуванням інерції оберту, деформацій зсуву та поздовжніх сил кожне з рівнянь буде мати наступний громіздкий вигляд, з якого ми отримали і рівняння (10), коли не враховували деформації зсуву ($k_x = \infty$), інерцію оберту ($r^2 = 0$) та прийнявши

$$\omega = 0 \text{ (що рівнозначно } \lambda_i^4 = \frac{\mu \cdot \omega^2 \cdot \ell^4}{EI} = 0)$$

$$\left(1 - \frac{N}{k_x GF} - \frac{r^2 EJ}{\ell^4 k_x GF} \lambda_i^4\right) \cdot (2c' - \lambda_i^4) + 2\beta_i^2 \cdot \left[c' \frac{EJ}{\ell^2 k_x GF} - \frac{N\ell^2}{2EJ} \cdot \left(1 - \frac{N}{k_x GF}\right) - \lambda_i^4 \cdot \left(\frac{r^2}{2\ell^2} + \frac{EJ}{2\ell^2 k_x GF} \right) \right] + \beta_i^4 = 0 \quad (19)$$

З врахуванням інерції оберту та деформації зсуву отримаємо наступну систему рівнянь для стійкості шаруватого стержня з пружним шаром між гілками стержня:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{N_1}{k_x G_1 F_1}\right) \cdot (2c'_1) + 2\beta_i^2 \cdot \left[c'_1 \frac{E_1 J_1}{\ell^2 k_x G_1 F_1} - \frac{N_1 \ell^2}{2E_1 J_1} \cdot \left(1 - \frac{N_1}{k_x G_1 F_1}\right) \right] + \beta_i^4 = 0 \\ \left(1 - \frac{N_2}{k_x G_2 F_2}\right) \cdot (2c'_2) + 2\beta_i^2 \cdot \left[c'_2 \frac{E_2 J_2}{\ell^2 k_x G_2 F_2} - \frac{N_2 \ell^2}{2E_2 J_2} \cdot \left(1 - \frac{N_2}{k_x G_2 F_2}\right) \right] + \beta_i^4 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Як видно з самих рівнянь інерція оберту у даному випадку не впливає на стійкість (вони автоматично вилучаються з рівнянь), але члени, які враховують деформації зсуву залишились.

Попередньо можна на наведеному вище прикладі проаналізувати вплив деформацій зсуву на стійкість складеного стержня. Для цього треба проаналізувати члени, де у знаменнику є коефіцієнт k_x . Взагалі даний коефіцієнт обчислюється за формулою

$$k_x = \frac{n^2 \xi^2 + \frac{1}{3} n \xi + \frac{1}{30} (1 + 2n)}{n^2 \xi^4 + \frac{1}{3} n \xi^2 + \frac{1}{36}}, \quad (21)$$

де n – відношення площі перерізу поясів до площі перерізу вертикальних листів; ξ – коефіцієнт, що дорівнює відношенню відстані від нейтральної осі до відстані до центру тяжіння.

На основі раніше виконаних досліджень за відповідними формулами обчислено, що для

двох балок даний коефіцієнт становить $k_x = 0,25$. При даному значенні коефіцієнта ($k_x = 0,25$) для двох складових формули (21) ми отримуємо:

$$\frac{N_1}{k_x G_1 F_1} = 0,000361, \quad \frac{E_1 J_1}{\ell^2 k_x G_1 F_1} = 0,00915.$$

Як перший член так і другий хоча і мають не однаковий порядок, але при розрахунках критичної стискальної сили, будемо враховувати обидва, щоб проаналізувати більш точно вплив здвигів. Тому приймаємо до розрахунків систему рівнянь у вигляді (20), де невідомим є стискальна сила. Після підстановки у рівняння даних з попередніх розрахунків маємо систему двох рівнянь при

$$k^2 = \frac{N_2}{N_1}, \quad E_1 I_1 = E_2 I_2, \quad G_1 F_1 = G_2 F_2, \quad c'_2 = c'_1 m$$

з двома невідомими α_2 та N_1

$$\begin{cases} 2c'_1 \cdot \left(1 - \frac{N_1}{k_x GF} + 2\beta^2 \cdot \frac{EI}{\ell^2 k_x GF}\right) \cdot (1 - \alpha_2) - 2\beta^2 \cdot \frac{N_1 \ell^2}{2EI} \cdot \left(1 - \frac{N_1}{k_x GF}\right) + \beta^4 = 0 \\ 2c'_1 m \cdot \left(1 - \frac{N_1 k^2}{k_x GF} + 2\beta^2 \cdot \frac{EI}{\ell^2 k_x GF}\right) \cdot \left(\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}\right) - 2\beta^2 \cdot \frac{N_1 \ell^2 k^2}{2EI} \cdot \left(1 - \frac{N_1 k^2}{k_x GF}\right) + \beta^4 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Рішення дає уточнене значення для критичної сили для наведеного вище прикладу (при $m=1$, $k^2=1$) з врахуванням деформацій зсуву

$N_{\text{кр}} = 33,146$ кН., тобто уточнення в сторону зменшення на 3,09 %.

У роботі [3] наведена формула, отримана також з врахуванням зсувів, але з деякими припущеннями, яка має наступний вигляд і дає результат при підстановці у формулу даних наведеного прикладу

$$N_{\text{кр}} = \frac{N_m}{\left(1 + \frac{N_m}{GF\alpha}\right)} = 34,192. \quad (23)$$

де N_m – критична сила для суцільного стержня, α – коефіцієнт нерівномірності розподілу зсувів у перерізі.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Солдатов, К. И. К вопросу о собственных частотах колебаний мостовых конструкций на упругих опорах [Текст] / К. И. Солдатов // Труды ДИИТа, вкл. 116, Вопросы прикладной теории колебаний. – 1972. – С. 97-119.
2. Солдатов, К. И. Колебания и устойчивость многопролетных регулярных балок на упругих опорах при действии продольных сил [Текст] / К. И. Солдатов, Б. П. Червацкий // Труды ДИИТа, , Вопросы теории колебаний и динамики мостов. – 1975. – вып. 169/19. – С. 25-32.
3. Ржаницын, А. Р. Строительная механика [Текст]: учеб. пособие для строит. специальностей вузов. / А. Р. Ржаницын. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш.шк., 1991. – 439 с.
4. Снитко, Н. К. Строительная механика [Текст]: учеб. для вузов / Н. К. Снитко. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш.шк., 1972. – 488 с.

Надійшла до редколегії 21.11.2011.

Прийнята до друку 20.12.2011.