

## ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ШЛЯХОМ АНЛІЗУ ЇХ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ

В статті розглянуто моделі вільних коливань лінійних систем, запропоновано методику ідентифікації таких систем шляхом аналізу їх вільних коливань.

*Ключові слова:* динамічні випробування, власна частота, розрахункова модель, ідентифікація

В статье рассмотрены модели свободных колебаний линейных систем, предложено методику идентификации таких систем путем анализа их свободных колебаний.

*Ключевые слова:* динамические испытания, собственная частота, расчетная модель, идентификация

The models of free oscillations of linear systems are considered, it is offered a technique of identification of such systems by the analysis of their free oscillations.

*Keywords:* dynamic tests, natural frequency, computational model, identification

### Вступ

В експериментальній практиці методи динамічних випробувань мостів розділяють на активні, коли застосовується певне динамічне навантаження, та пасивні, коли використовується випадкове збудження коливань. Найбільш відпрацьованими з методологічної точки зору є методи активної вібродіагностики (особливо методи з використанням вібраційної машини) [1]. Існує усталена думка, що методи пасивної вібродіагностики не можуть дати тих результатів, які дають методи активної вібродіагностики [2, 3]. В той же час методи активної вібродіагностики не розповсюджені в практиці дослідження мостів в Україні (на даний час немає жодної робочої вібромашини), вони потребують набагато більших затрат коштів та часу, тому розвиток альтернативних методів динамічних випробувань мостових конструкцій є актуальною проблемою.

### Аналіз публікацій

Відомо, що повністю ідентифікувати лінійну систему можна визначивши її імпульсну перехідну функцію [1], а застосувачи операційне числення лінійну стаціонарну систему можна з необхідною точністю представити за допомогою матриці передаточних функцій, яка встановлює зв'язок між входною силою збудження та реакцією системи. Передаточна функція є перетворенням Фур'є від реакції системи на навантаження у вигляді ідеального одиничного імпульсу. Реакція системи на такий імпульс називається *імпульсною перехідною функцією (імпульсною характеристикою) або ж функцією Гріна*. Найчастіше її позначають як

$h(t)$ . Якщо комплексну передаточну функцію позначити як  $K(\omega)$ , то реакція лінійної системи описується як:

$$S_{\text{вих}}(\omega) = S_{\text{вх}}(\omega) K(\omega), \quad (1)$$

де:  $S_{\text{вх}}(\omega)$  та  $S_{\text{вих}}(\omega)$  – відповідно спектральні функції навантаження на вході та реакції на виході системи.

Модуль комплексної передаточної функції називають амплітудно-частотним спектром (АЧХ), аргумент – фазочастотним спектром (ФЧХ).

**Метод функцій Гріна.** Нехай є система з  $n$  ступенями свободи, яка описується лінійним диференціальним рівнянням другого ступеню. Якщо в  $k$  точках системи прикладені силові збудження  $F(k)$ , то реакцію системи в точці  $i - y_i(t)$  можна представити наступним виразом [1]:

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t F_k(\tau) h_{ik}(t, \tau) d\tau, \quad (2)$$

Матрицю складену з функцій  $h_{ik}(t, \tau)$  – імпульсних перехідних функцій між точками  $i - k$ , називають матрицею Гріна.

**Метод розкладання за власним формами.** В системі нормальних узагальнених координат реакція  $y_i(t)$  може бути представлена як сума  $n$  ортогональних реакцій за власними (модальними) формами коливань [1, 4]

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n y_{ij}(t), \quad (3)$$

Для практичних цілей, найчастіше достатньо розглянути декілька перших власних форм (мод) коливань.

### Результати досліджень

Об'єднуючи вирази (2) та (3) для лінійних стаціонарних систем, реакцію системи за  $j$ -ю власною формою можна представити як:

$$y_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t \sum_{j=1}^n F_k(\tau) h_{ikj}(t, \tau) d\tau, \quad (4)$$

де  $h_{ikj}(t, \tau)$  – функція Гріна для пари точок  $i-k$  за  $j$ -ю власною формою.

Фактично кожену функцію Гріна тут представлено як суму ортогональних функцій, які назвемо *модальними імпульсними перехідними функціями* (модальними функціями Гріна)

$$h_{ik}(t, \tau) = \sum_{j=1}^n h_{ikj}(t, \tau), \quad (5)$$

Відповідно до залежностей між імпульсною характеристикою та комплексною передаточною функцією, останню також можна представити як суму модальних передаточних функцій

$$K_{ik}(\omega) = \sum_{j=1}^n K_{ikj}(\omega), \quad (6)$$

Отже, вільні коливання лінійної стаціонарної системи розглядаємо як суму ортогональних реакцій за власними формами, ваговий вплив яких визначається модальними функціями Гріна або ж модальними передаточними функціями та початковими умовами, які передували вільним коливанням: швидкість (*імпульсна складова*) та зміщення (*кінематична складова*).

Враховуючи ортогональність модальних функцій Гріна, кожна модальна передаточна функція (перетворення Фур'є від модальної функції Гріна) може бути визначена (розрахована) як для лінійного осцилятора, вільні коливання якого описуються наступною функцією [4]

$$y(t) = e^{-\alpha t} \left[ \frac{y'(0) + y(0)\alpha}{W_D} \sin(W_D t) + y(0) \cos(W_D t) \right], \quad (7)$$

де  $y(0)$  та  $y'(0)$  – початкові умови (зміщення та швидкість відповідно),  $\alpha$  – коефіцієнтом демпфірування,  $W_D$  – циклічна частота коливань власної форми системи з врахуванням демпфірування.

**Імпульсне збудження.** Якщо прийняти, що початкове зміщення  $y(0) = 0$  і система збуджується імпульсом  $p$ , а отже  $y'(0) = p/m$  ( $m$  – маса системи), тоді

$$y(t) = e^{-\alpha t} \left[ \frac{p}{mW_D} \sin(W_D t) \right], \quad (8)$$

Використавши відомі залежності, що:  $W_{D^2} \approx W^2 = k/m = 1/mA_1$ , де  $W$  – частота власної форми,  $k$  – жорсткість,  $A_1$  – реакція від одиничної статичної сили; маємо:

$$y(t) = e^{-\alpha t} \left[ pA_1 W \sin(Wt) \right], \quad (9)$$

На рис. 1 представлено графік імпульсної перехідної функції за виразом (9) при  $W = 2$ ,  $pA_1 = 5$ ,  $\alpha = 0,159$  (декремент коливань  $\delta = 0,5$ ).

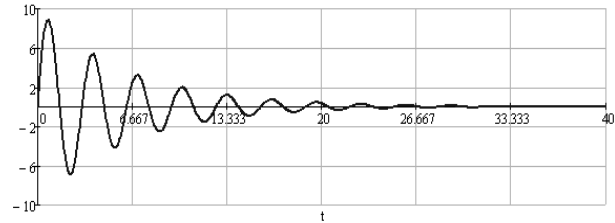


Рис. 1. Графік імпульсної перехідної функції лінійного осцилятора

Отже, модальна функція Гріна має форму синуса з циклічною частотою  $W$ , а її початкова амплітуда пропорційна величині імпульсу  $p$ , циклічній частоті та статичному коефіцієнту впливу  $A_1$ .

Модальна передаточна функція є перетворенням Фур'є від виразу (8) та з врахуванням властивостей вказаного перетворення може бути визначена як сума двох комплексних функцій

$$K(\omega) = \frac{1}{2} \left( e^{-j\pi/2} \cdot Y(\omega - W) + e^{j\pi/2} \cdot Y(\omega + W) \right), \quad (10)$$

де

$$Y(\omega) = \frac{pWA_1}{\alpha + j\omega}.$$

Доданки у виразі (10) є копіями перетворення Фур'є від експоненціальної функції, які зміщені від нуля в область від'ємних та додатних частот. Їх фазові складові повернуті на  $(-\pi/2)$  та на  $\pi/2$  відповідно, завдяки чому при

$\omega=0$  їх фази співпадають та рівні 0, модулі доданків складаються, тому, знехтувавши  $\alpha$  у порівнянні з  $W$ , маємо наступний вираз для модуля комплексного коефіцієнту на нульовій частоті

$$K(0) = p \frac{A_1 W}{\sqrt{\alpha^2 + W^2}} \approx p A_1, \quad (11)$$

Фазове положення на нульовій частоті, в залежності від знаку при коефіцієнті впливу  $A_1$ , може бути 0 або ж  $\pi$ .

Максимальні значення функції є при  $\omega = \pm W$ , тут один з доданків є набагато меншим за інший, а його фаза повернута на  $\pi/2$ , тому нехтуючи одним з доданків, та використавши залежність  $\alpha = \delta W / 2\pi$ , маємо вираз для модуля комплексного коефіцієнту на власній частоті системи  $W$

$$K(W) \approx 0,5 p \frac{A_1 W}{\sqrt{\alpha^2}} = p A_1 \frac{\pi}{\delta}, \quad (12)$$

Відношення  $K(W) / K(0) = \pi / \delta$ , як це і має бути для резонансної кривої (ще одна назва АЧХ) лінійного осцилятора.

**Кінематичне збудження.** Якщо прийняти, що початкове зміщення  $y(0) = A$ , швидкість  $y'(0) = 0$ , а система збуджується відпусканням, то використавши залежності  $\alpha = \delta W / 2\pi$  та  $W_D \approx W$ , вираз (7) записується, як

$$y(t) = A e^{-\alpha t} \left[ \frac{\delta}{2\pi} \sin(Wt) + \cos(Wt) \right], \quad (13)$$

Нехтуючи першим доданком в дужках (для будівельних конструкцій  $\delta / 2\pi < 0,1$ ), та виразивши початкове відхилення через силу відтяжки  $A = P A_1$ , маємо

$$y(t) = P A_1 e^{-\alpha t} \cos(Wt), \quad (14)$$

Перетворення Фур'є від виразу (14) має наступний вид

$$C(\omega) = \frac{1}{2} (Y(\omega - W) + Y(\omega + W)), \quad (15)$$

де

$$Y(\omega) = \frac{P A_1}{\alpha + j\omega}.$$

Доданки у виразі (15) є копіями перетворення Фур'є від експоненціальної функції, які змі-

щені від нуля в область від'ємних та додатних частот. При  $\omega=0$  їх фази протилежні, отже модуль суми рівний нулю  $C(0) = 0$ . Максимальні значення функції є при  $\omega = \pm W$ , тому подібно до виразу (12), маємо

$$C(W) \approx 0,5 \frac{P A_1}{\sqrt{\alpha^2}} = \frac{P A_1}{W} \frac{\pi}{\delta}, \quad (16)$$

Можна показати, що при рівності затраченої енергії при імпульсному та кінематичному збудженнях амплітудні коефіцієнти у виразах (12) та (16) є рівними, тобто  $p A_1 = P A_1 / W$ . Близькими є і амплітудні спектри реакцій на імпульсне та кінематичне збудження, найбільш подібні вони в зонах біля  $\omega = \pm W$ , а найбільш відрізняються при наближенні до  $\omega = 0$ .

З врахуванням першого доданку у виразі (13), та при умові рівності енергій в обох випадках збудження, маємо наступне співвідношення

$$C(0) = \frac{P A_1}{W} \frac{\delta}{2\pi} = K(0) \frac{\delta}{2\pi}, \quad (17)$$

Якщо розглянути імпульсну характеристику (9) зміщену на четверть періоду (фазове положення –  $\pi/2$ ), то при обумовлених вище спрощеннях вона буде подібною реакції на кінематичне збудження. Подібність буде тим більшою чим меншим є декремент коливань, відповідно подібними будуть і амплітудні спектри (рис. 2).

Якщо ж врахувати зменшення амплітуди за чверть періоду у вигляді коефіцієнту подібності  $k_1$ , оберненого до згасання

$$k_1 = e^{\delta/4}, \quad (18)$$

то графіки амплітудних спектрів за обома варіантами повністю співпадуть. Якщо не виконується умова про рівність енергії, то слід також врахувати коефіцієнт приведення до одиничного імпульсу  $k_2 = W / P$ , який впливає з виразу  $p A_1 = P A_1 / W$ .

Таким чином передаточну функцію осцилятора можна визначити як спектральну функцію реакції на його збудження як імпульсом так і відтяжкою силою  $P$ . В останньому випадку перетворення Фур'є розраховується починаючи з часу рівного чверті періоду власних коливань, а значення амплітудного спектру коригуються (множаться) на коефіцієнти  $k_1$  та  $k_2$ .

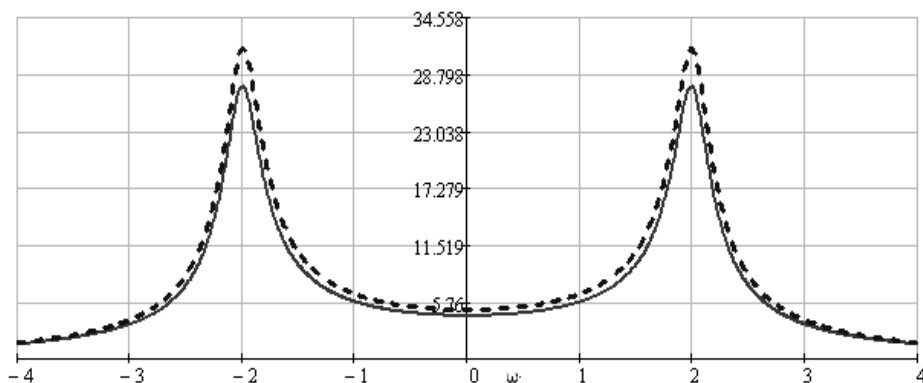


Рис. 2. Амплітудні спектри реакції: на кінематичне збудження зі зміщенням на чверть періоду – суцільною лінією; на імпульсне збудження – пунктиром

### Практичне застосування

Застосування результатів викладеного аналізу покажемо на моделі, яку створимо в середовищі програмного комплексу, що реалізує метод скінчених елементів (МСЕ). Розрахункова схема – однопрогонова балка з довжиною розрахункового прольоту 20,0 м; жорсткістю  $EI = 2,219 \times 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ ; погонною масою

1272 кг/м; коефіцієнт відносного демпфірування  $\eta = \alpha / \alpha_{\text{кр}} = 0,02$  ( $\delta = 2\pi\eta = 0,125$ ).

Точка прикладання навантаження знаходиться в 1/8 прольоту, реакцію реєструємо в 1/4 прольоту. Розглядаємо два випадки навантаження: імпульсне та відтяжка силою 9810 Н (1 тонна). Амплітудні спектри реакцій для обох випадків навантаження представлені на рис. 3.

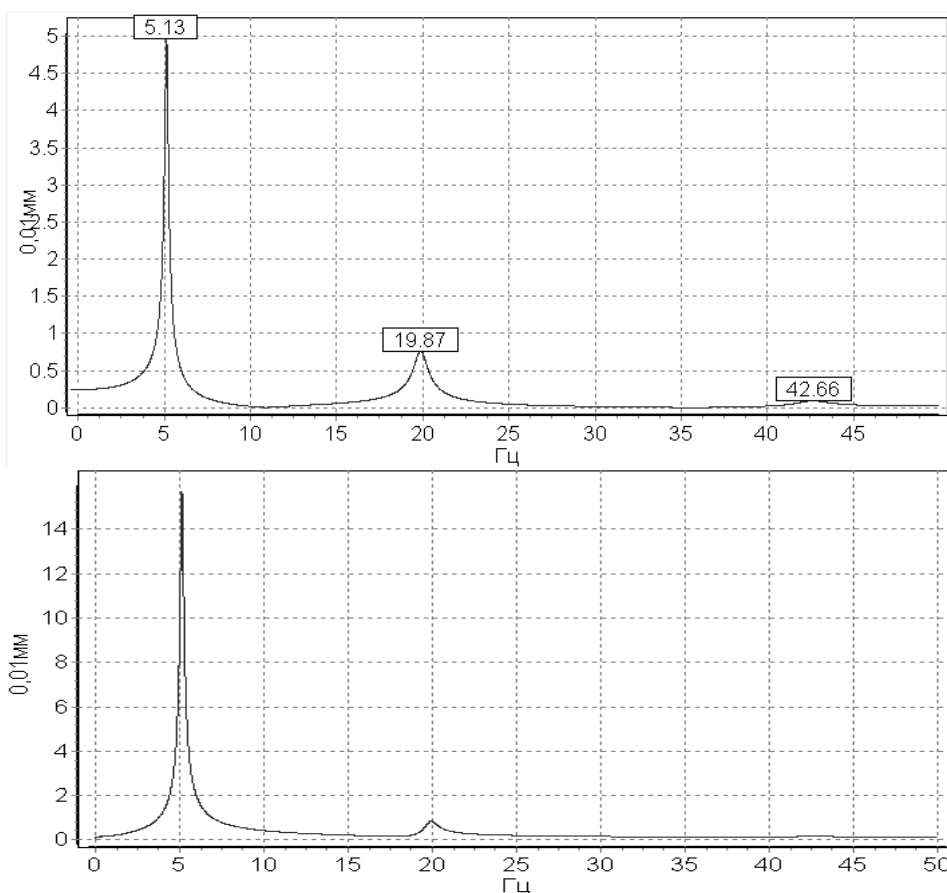


Рис. 3. Амплітудні спектри реакції в 1/4 прольоту: при імпульсному (вгорі) та кінематичному (внизу) навантаженнях

Насамперед добре помітно відмінність між двома спектрами, а саме, що на графіку спектру реакції при імпульсному навантаженні піки, що

відповідають гармонікам вищих частот більш вирізняються. Цього слід було очікувати, адже при кінематичному навантаженні амплітуди

півків спектру обернено пропорційні частотам гармонік (16), тоді як при імпульсному навантаженні амплітуди півків незалежні від частоти гармонік (12).

Розглянемо спектр реакції при імпульсному навантаженні. За відношенням ординат півків можна отримати інформацію про ваговий вклад кожної модальної функції Гріна. В даному випадку частка третьої форми менша за 2 %, отже з такою ж точністю можна отримати передаточну функцію синтезуючи модальні передаточні функції лише за першими двома формами. Для цього потрібно знати: частоту коливань за кожною власною формою ( $W_i$ ), декремент коливань даної форми ( $\delta_i$ ) та ваговий статичний коефіцієнт впливу ( $A_i$ ). Останній параметр можна визначити або ж за спектром реакції при відомій величині імпульсу, або ж за результатами статичного навантаження. В обох випадках також використовуємо ваговий коефіцієнт даної форми, який знаходимо за відношенням амплітуд півків, а його знак визначаємо за фазовим спектром. Так в даному випадку знаки для перших двох форм додатні (вибір знаку умовний), для третьої форми від'ємний (протилежний).

В числах маємо:

– кругові частоти перших двох форм  $W_1 = 32,22$ ;  $W_2 = 124,78$ ;

– декременти коливань  $\delta_1 = \delta_2 = 0,125$ ;

– відношення  $A_1 / A_2 = 4,97 / 0,77 = 6,45$ ;

– статичний коефіцієнт впливу  $K(0) = 2,43 \times 10^{-4} / 9810 = 2,48 \times 10^{-8}$ , м.

Відповідно до відношення  $A_1 / A_2$  визначаємо:

$$A_1 = K(0) \times 6,45 / 7,45 = 2,15 \times 10^{-8};$$

$$A_2 = K(0) \times 1 / 7,45 = 0,33 \times 10^{-8}.$$

Передаточна функція буде комплексною сумою модальних передаточних функцій за першими двома формами (19)

$$K(\omega) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \left( e^{-j\pi/2} \cdot \frac{W_i A_i}{\delta_i W_i / 2\pi + j(\omega - W_i)} + e^{j\pi/2} \cdot \frac{W_i A_i}{\delta_i W_i / 2\pi + j(\omega + W_i)} \right), (19)$$

Комплексна передаточна функція (АФЧХ) синтезована за виразом (19) у вигляді амплітудного та фазового спектрів представлена на рис. 4.

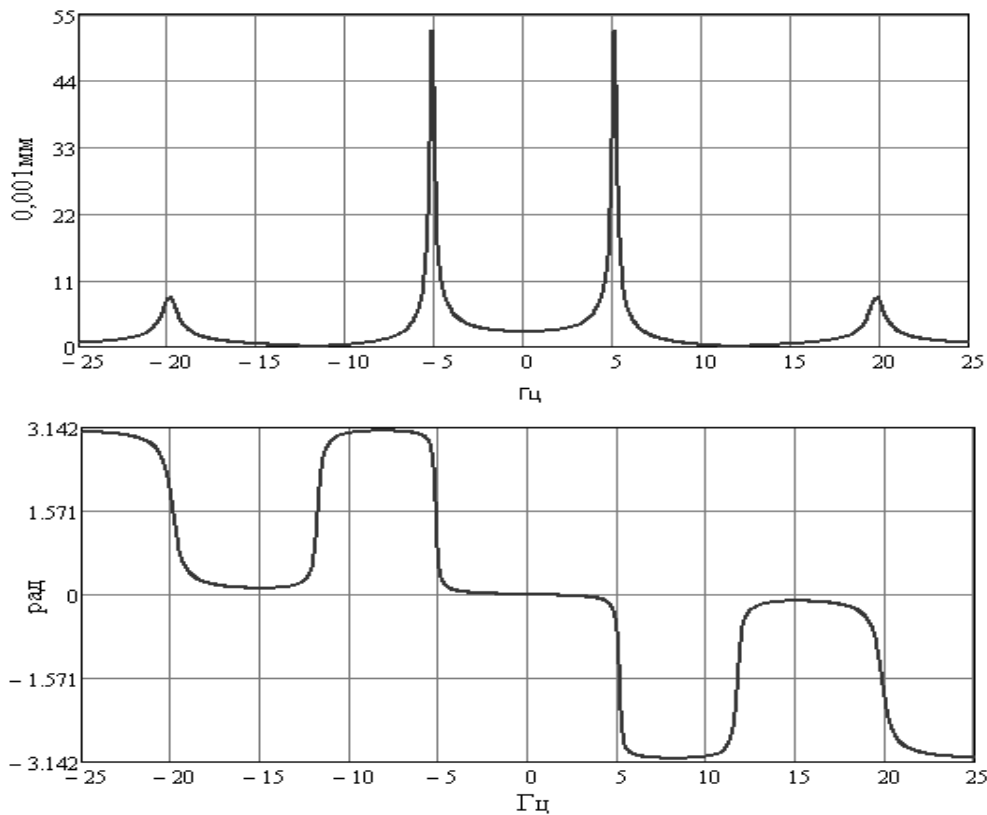


Рис. 4. Амплітудний та фазовий спектри передаточної функції синтезованої за виразом (19)

## Висновки

Виконані дослідження показують, що шляхом аналізу вільних коливань лінійних систем можна проводити їх ідентифікацію в тому ж об'ємі як і при використанні активного збудження. Основною проблемою на шляху практичної реалізації запропонованої моделі є відсутність практичних методик, які б дозволяли визначати з необхідною точністю частоти та декременти власних форм коливань, особливо в зонах їх згущення. Саме ця проблема і є темою досліджень автора на даний момент часу. До речі, згущення частот викликає значні ускладнення і при активній вібродіагностиці, вимагаючи застосування декількох вібротомашин, їх відповідної, часто складної, синхронізації і т.п.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Вибрации в технике [Текст]: справочник в 6 т. – М.: Машиностроение, 1978-1981.
2. Методические рекомендации по вибродиагностике автодорожных мостов. [Текст] – М.: Росавтодор, 2001. – 24 с.
3. РВ.2.3-218-00018112-521:2006. Рекомендації з динамічних випробувань мостів та шляхопроводів. [Текст]. – К.: Укравтодор, 2006. – 34 с.
4. Клаф, Р., Динамика сооружений. [Текст] / Р. Клаф, Дж. Пензиен; перевод с англ. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.

Надійшла до редколегії 10.09.2011.

Прийнята до друку 20.10.2011.