

МОСТИ ТА ТУНЕЛІ: ТЕОРІЯ, ДОСЛІДЖЕННЯ, ПРАКТИКА

УДК 624.21:534.2

М. М. ПОПОВИЧ¹, С. В. КЛЮЧНИК^{2*}

¹ Кафедра «Транспортна інфраструктура», Український державний університет науки і технологій, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (0562) 33 58 12, ел. пошта popovich.n.m@ukr.net, ORCID 0000-0003-1790-3110

^{2*} Кафедра «Транспортна інфраструктура», Український державний університет науки і технологій, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (0562) 33 58 12, ел. пошта ssser05@ukr.net, ORCID 0000-0001-7771-8377

НЕЛІНІЙНІ СТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ БАЛОЧНИХ ПРОГОНОВИХ БУДОВ ВІД ДІЇ ПЕРІОДИЧНИХ ІМПУЛЬСІВ

Мета. Метою роботи є побудова наближеного рішення стаціонарних коливань нелінійного рівняння з кубічною характеристикою. Розрахункова схема, що розглядається найбільше відповідає умовам роботи прогонової будови при виникненні дефектів опорних частин. В цьому разі можуть проявитись поздовжні сили в балці прогонової будови. **Методика.** В роботі досліджується нелінійні коливання прогонових будов малих мостів. Розглядаються незатухаючі коливання балки, що спирається на шарнірно нерухомі опорні частини з обох сторін від дії періодичного одностороннього імпульсного навантаження. Розрахункова схема відрізняється від статично визначеної схеми балки, яка враховує дефектні опорні частини. В статті, що розглядається можливий перехід до системи балки на рухомих опорних частинах. Для рішення нелінійного рівняння другого порядку однопрогонової балки з врахуванням поздовжньої сили прийнятий метод змінного масштабу часу, розроблений академіком Академії наук УССР, професором Бондарем М. Г. Метод змінного масштабу дає достатньо наближені рішення такого класу задач. **Результати.** Виконано наближене аналітичне рішення методом змінного масштабу часу стаціонарних нелінійних коливань прогонової будови з урахуванням поздовжньої сили, що визвано односторонніми імпульсами, що періодично повторюються. За одержаними формулами рішення нелінійного рівняння з кубічною характеристикою легко побудувати амплітудно-частотні характеристики і форми коливань. **Наукова новизна.** Вперше виконано рішення рівняння коливань балки з врахуванням поздовжньої сили. Встановлено критерії ударного резонансу для системи без тертя, а також з врахуванням в'язкого тертя. Одержано вираз для амплітудно-частотної характеристики системи, що розглядається. **Практична цінність.** Дослідження коливань прогонової будови з врахуванням поздовжньої сили дали практичну цінність у можливості аналітичного обчислення форм коливань, критерії ударного резонансу та амплітудно-частотної характеристики системи від дії періодичних односторонніх імпульсних навантажень. Система балок прогонових будов враховує дефектні опорні частини (заклинення рухомих опорних частин) прогонових будов малих та середніх залізничних мостів.

Ключові слова: стаціонарні коливання; ударний імпульс; балка; прогонова будова залізничного моста; нелінійні коливання; амплітудно-частотна характеристика

Вступ

В роботах (Бондарь, 1962; Казакевич, 2009; Davtalab, Woo, & Pagwiwoko, & Lenci, 2015; Burlon, Kougioumtzoglou, Failla, & Arena, 2019) автори досліджують нелінійні коливання систем, що збуджуються різними періодичними збуджувачами, в тому числі й ударними.

Експериментальні дані динамічних випробувань прогонових будов балочних мостів мають велике відхилення. Одним із можливих пояснень такого явища є (Бондарь, 1962) нелінійність коливань прогонових будов, викликані

недосконалістю опорних частин малих мостів. В такому разі параметри коливань прогонових будов залежать від випадкових початкових умов.

В роботі професора М. Г. Бондаря (1962) розглянуті вільні незатухаючі коливання простої балки з врахуванням поздовжньої сили. Показано, що вплив поздовжньої сили на частоту вільних коливань має обмежене значення. Також показано, що вплив нелінійності на коливання прогонової будови при перехідному режимі коливань буде менше ніж при стаціонарних коливаннях. Особливий інтерес виникає

МОСТИ ТА ТУНЕЛІ: ТЕОРІЯ, ДОСЛІДЖЕННЯ, ПРАКТИКА

коли збуджувачем такої нелінійної системи є періодичні імпульси.

На прогонових будовах залізничних мостів з метою зменшення ударів коліс рухомого складу стик рейок повинен бути не менше 2 м від спирання прогонової будови на опорні частини. Наявність стиків їздових рейок визивають удари коліс рухомого складу (Радзиховский, Ройтбурд, & Тененбаум, 1976; Радзиховский, Ройтбурд, Тененбаум et al., 1980).

При однакових відстанях між осями коліс рухомого складу можливе встановлення стаціонарних коливань прогонових будов від імпульсів (ударів), що періодично повторюються (Reshetnov, Solomka, & Ovchynnykov, 2017).

Недоліки в конструкціях опорних частин можуть виникати – це і заклинка опорних частин, зміна величини тертя поверхонь і таке інше (Ключник, 2017). При наявності дефектів опорних частин, динамічна робота прогонових будов має зміни. Необхідно розглянути незатухаючі коливання балки малого моста, що спирається на обидві шарнірно нерухомі опорні частини. У зв'язку з цим прийнята розрахункова схема ближче відповідає умовам роботи прогонової будови у порівнянні зі статично визначеною балкою (Тарасенко, 1972а; Тарасенко, 1972b). В роботі (Бондарь, 1962) одержано нелінійне рівняння з кубічною характеристикою.

Мета

Метою роботи є побудова наближеного рішення стаціонарних коливань нелінійного рівняння без тертя, а також з врахуванням в'язкого тертя.

Методика

Визначення чинників впливу на динамічну поведінку мостів під рухомих навантаженням та вплив параметрів конструкції є основою більшості розрахунків конструкції на динамічне навантаження. Найчастіше власні форми коливань представляють у вигляді простих гармонічних функцій, сукупність яких називається спектром власних частот (Yang, Yau, & Wu, 2004; Казакевич, 2009). В роботі досліджується нелінійні незатухаючі коливання балок прогонових будов малих мостів, що спирається на шарнірно нерухомі опорні частини з обох сторін. Дуже часто опорні частини, що недостатньо обслуговують мають такі дефекти як за-

клинювання, сухе тертя рухомих опорних частин, попадання в рухомі частини сміття чи ґрунту. При появі дефектів опорних частин, особливо рухомих, виникає додаткове горизонтальне зусилля, що впливає на частоти власних коливань балок прогонових будов. Розрахункова схема такої системи відрізняється від статично визначеної схеми балки, яка враховує дефектні опорні частини. Тож для рішення нелінійного рівняння другого порядку прийнятий метод змінного масштабу часу, розроблений академіком АН УССР, професором М. Г. Бондарем (1969).

Результати

Розглянемо стаціонарні коливання простої балки, що спирається на шарнірно нерухомі опорні частини з урахуванням поздовжньої сили (рис. 1) від дії імпульсів, що періодично повторюються (рис. 2).

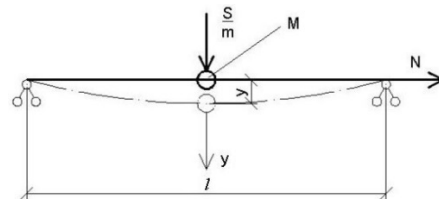


Рис. 1. Розрахункова схема балки на двох опорах при наявності поздовжньої сили, що виникає від дефектів опорних частин

Така розрахункова схема (рис. 1) відповідає умовам роботи прогонових будов, яка враховує наявність дефектів опорних частин.

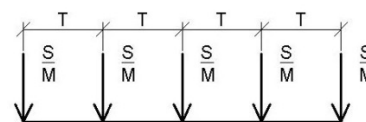


Рис. 2. Схема дії імпульсного навантаження на масу М

Вільні коливання такої системи (рис. 1) можна описати рівнянням (Бондарь, 1962):

$$\ddot{y} + \alpha y + \beta y^3 = 0, \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{48EI}{Ml^3}; \quad \beta = \frac{6\pi^2 EI}{5Ml^3 \rho^2},$$

де E – модуль пружності матеріалу балки; I – момент інерції поперечного перерізу балки; EI – жорсткість балки; ρ – радіус інерції перерізу

зу балки.

Стационарні коливання без врахування тертя. Диференціальне рівняння коливання маси M при дії імпульсів, що періодично повторюються можна записати так:

$$\ddot{y}(t) + \alpha(y) + \beta y^3 = \frac{S}{M} [\sigma_1(t) + \sigma_1(t-T) + \sigma_2(t-2T) + \dots], \quad (2)$$

де S – величина імпульсу що прикладається; M – маса балки; t – час; σ_1 – імпульсивна функція першого роду; T – період прикладання односторонніх імпульсів.

Розглянемо один із періодів T коливання маси M . Протягом періоду (T), що розглядається, коливання балки являються вільними і у відповідності з методом змінного масштабу (Бондарь, 1969) описується рішенням:

$$f(y) = f(y_0) \cos \eta(t) + v_0 \sin \eta(t), \quad (3)$$

де $f(y)$ – значення амплітудної функції; $f(y)$ – величина амплітудної функції при $t=0$; v_0 – швидкість при $t = t_0 = 0$; $\eta(t)$ – фазова функція.

Диференціюючи (3) по часу t находимо:

$$f'(y) = -f(y_0) \sin \eta(t) + v_0 \cos \eta(t). \quad (4)$$

В рівності (4) враховано $\eta(t) = \theta t$ (Бондарь, 1962).

В кінці періоду (T), що розглядається, безпосередньо перед прикладанням наступного імпульсу (при $t=T$) находимо вираз для амплітудної функції та швидкості:

$$\left. \begin{aligned} f(y_{-1}) &= f(y_0) \cos \eta(T) + v_0 \sin \eta(T), \\ v_{-1} &= -f(y_0) \sin \eta(T) + v_0 \cos \eta(T). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Індексом «-1» позначено величину амплітудної функції та швидкості безпосередньо перед прикладанням імпульсу, а «+1» теж після прикладання імпульсу.

В момент після прикладання імпульсу амплітудна функція не змінить свого значення, а швидкість у відповідності з теоремою про кількість руху (Бондарь, & Попович, 1973) миттєво зміниться на величину S/M і буде:

$$v_{+1} = -f(y_0) \sin \eta(T) + v_0 \cos \eta(T) + S/M. \quad (6)$$

Розглянемо стационарні коливання в тому розумінні, що рух на кожному із періодів (T) імпульсів (рис. 2) повторюється. Тоді критерії стационарності запишемо так:

$$f(y_{-1}) = f(y_{+1}); \quad v_{-1} = v_{+1}. \quad (7)$$

Підставляючи значення амплітудної функції і швидкості в умови стационарності одержуємо:

$$\left. \begin{aligned} f(y_0) &= f(y_0) \cos \eta(T) + v_0 \sin \eta(T), \\ v_0 &= -f(y_0) \sin \eta(T) + v_0 \cos \eta(T) + S/M. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Із системи рівнянь (8) з двома невідомими находимо:

$$f(y_0) = (S/2M) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \eta(T); \quad v_0 = S/2M. \quad (9)$$

Підставляючи знайдені початкові умови (9) в рішення (3) находимо закон руху на дільниці між імпульсами:

$$f(y) = \frac{S}{2M} \frac{1}{\sin 0,5\eta(T)} \times [\cos \eta(t) \sin 0,5\eta(T) + \sin \eta(t) \cos 0,5\eta(T)],$$

або в одночленному виразі:

$$f(y) = \frac{S}{2M} \frac{1}{\sin 0,5\eta(T)} \sin [\eta(t) + \gamma], \quad (10)$$

де: $\gamma = \eta(T)/2$.

Амплітудна функція $f(y)$ (10) має найбільше значення при $y=A$, тобто $f(y_{\max}) = f(A)$.

Максимальне значення амплітудної функції буде мати місце при $\sin[\eta(t) + \gamma] = 1$, тоді:

$$f(A) = \frac{S}{2M} \frac{1}{\sin 0,5\eta(T)}. \quad (11)$$

Фазова функція у методі змінного масштабу має властивість (Бондарь, 1969) $\sin \eta(t) = \operatorname{sn} \theta t$, де sn – еліптичний синус Якобі, θ – частота вільних коливань, що залежить від амплітуди A .

На основі вищенаведеної рівності можна записати:

$$\sin \eta(T) = \sin \theta T, \quad \sin 0,5\eta(T) = \operatorname{sn} 0,5\theta T. \quad (12)$$

Підставляючи (12) в (11), одержимо:

$$f(A) = \frac{S}{2M} \frac{1}{\operatorname{sn} 0,5\theta T}. \quad (13)$$

В (13) період дії імпульсів T рівний:

$$T = 2\pi / \omega,$$

тоді вираз (13) для максимального значення амплітудної функції матиме вид:

$$f(A) = \frac{S}{2M} \operatorname{sn} \frac{\theta\pi}{\omega}, \quad (14)$$

де ω – частота прикладання імпульсів.

Амплітудна функція $f(A)$ має безкінечне значення при $\operatorname{sn} \frac{\theta\pi}{\omega} \rightarrow 0$. Звідси одержуємо умову ударного резонансу:

$$\frac{\pi\theta}{\omega} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \text{ або } \frac{\omega}{\theta} = \frac{1}{n}, \text{ де } n=1, 2, 3, \dots$$

У випадку кубічної характеристики рівняння

$$(2) f(y) = y\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}y^2} \text{ і } f(A) = A\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}A^2}, \quad (15)$$

тоді вираз (14) запишеться так:

$$A\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}A^2} = \frac{S}{2M} \frac{1}{\sin\pi\theta/\omega}, \quad (16)$$

$$\text{де } \theta = \sqrt{\alpha(1 + \frac{3\beta}{8\alpha}A^2)}.$$

Стационарні коливання з врахуванням тертя. Диференціальне рівняння коливання маси M при дії періодичного імпульсного навантаження можна записати так:

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y} + \alpha y + \beta y^3 = \frac{S}{M} [\sigma_1(t) + \sigma_2(t-T) + \sigma_3(t-2T) + \dots], \quad (17)$$

де n – малий коефіцієнт в'язкого тертя ($n \ll 1$); S – величина імпульсу що прикладається; M – приведена маса балки; t – час; σ_1 – імпульсивна функція першого роду; T – період прикладання односторонніх імпульсів.

Розглянемо, як і вище, один із періодів (T) дії імпульсів, приймаючи за початок відліку часу момент зникнення попереднього імпульсу. Протягом періоду (T), що розглядається, коливання маси M являються вільними і у відповідності з методом змінного масштабу описується рішенням:

$$f(x) = e^{-nt} [f(x_0)\cos\theta t + v_0\sin\theta t], \quad (18)$$

В кінці періоду (T), що розглядається, перед прикладанням наступного імпульсу вираз для амплітудної функції буде:

$$f(x_{-1}) = e^{-nT} [f(x_0)\cos\theta T + v_0\sin\theta T], \quad (19)$$

Диференціюючи (18) за часом t , маємо

$$f'(x)\dot{x}(t) = -ne^{-nt} [f(x_0)\cos\theta T + v_0\sin\theta T] + e^{-nt} [-f(x_0)\sin\theta T + v_0\cos\theta T] \cdot \theta.$$

Враховуючи співвідношення в методі змінного масштабу $\eta(t) = \theta t$, $\eta'(t) \equiv \theta$, одержимо вираз для швидкості:

$$\dot{x}(t) = -\frac{n}{\theta} e^{-nt} [f(x_0)\cos\theta T + v_0\sin\theta T] + e^{-nt} [-f(x_0)\sin\theta T + v_0\cos\theta T]. \quad (20)$$

Перед прикладанням наступного імпульсу швидкість буде рівна:

$$v_{-1} = -\frac{n}{\theta} e^{-nT} [f(x_0)\cos\theta T + v_0\sin\theta T] + e^{-nT} [-f(x_0)\sin\theta T + v_0\cos\theta T].$$

В момент прикладання наступного імпульсу вираз для амплітудної функції не змінить свого значення, тобто:

$$f(x_{+1}) = f(x_{-1}), \quad (21)$$

а швидкість миттєво зміниться на величину S/M , тобто:

$$v_{+1} = -\frac{n}{\theta} e^{-nT} [f(x_0)\cos\theta T + v_0\sin\theta T] + e^{-nT} [-f(x_0)\sin\theta T + v_0\cos\theta T] + \frac{S}{M}. \quad (22)$$

Підставляючи значення амплітудної функції (21) і швидкості (22) в умову періодичності (7), одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими $f(x_0)$ та v_0 :

$$f(x_0) = e^{-nT} [f(x_0)\cos\theta T + v_0\sin\theta T];$$

$$v_0 = -\frac{n}{\theta} e^{-nT} [f(x_0)\cos\theta T + v_0\sin\theta T] + e^{-nT} [-f(x_0)\sin\theta T + v_0\cos\theta T] + \frac{S}{M}. \quad (23)$$

Із (23) находимо:

$$f(x_0) = \frac{S}{M} \cdot \frac{e^{nT} \sin\theta T}{1 + e^{2nT} - 2e^{nT} \cos\theta T + \frac{n}{\theta} e^{nT} \sin\theta T}, \quad (24)$$

$$v_0 = \frac{S}{M} \cdot \frac{e^{nT} (e^{nT} - \cos\theta T)}{1 + e^{2nT} - 2e^{nT} \cos\theta T + \frac{n}{\theta} e^{nT} \sin\theta T}, \quad (25)$$

Підставляючи (24) та (25) в (18), після нескладних перетворень одержуємо закон руху на ділянці між імпульсами:

$$f(x) = \frac{S}{M} \times \frac{\left(e^{nt} \sqrt{1 + e^{2nT} - 2e^{nT} \cos\theta T} \right) \left(e^{-nt} \sin[\theta t + \gamma_1] \right)}{1 + e^{2nT} - 2e^{nT} \cos\theta T + \frac{n}{\theta} e^{nT} \sin\theta T}, \quad (26)$$

$$0 \leq t \leq T,$$

де γ_1 визначається із умови:

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\sin\theta T}{e^{nT} - \cos\theta T},$$

екстремуму $f(x)$ відповідає значення $t=t_m$, коли $\frac{df(x)}{dt} = 0$, одержуємо:

$$\operatorname{tg}(\theta t_m + \gamma_1) = \frac{\theta}{n}, \quad \theta t_m + \gamma_1 = \operatorname{arctg} \frac{\theta}{n} + i\pi,$$

де $i=0, 1, 2, 3, \dots$.

Находимо екстремальне значення амплітудної функції:

$$f(A_i) = \frac{S}{M} \cdot \frac{\left(e^{nT} \sqrt{1 + e^{2nT} - 2e^{nT} \cos \theta T} \right)}{1 + e^{2nT} - 2e^{nT} \cos \theta_i T + \frac{n}{\theta_i} e^{nT} \sin \theta_i T} \times \left(e^{-\frac{n}{\theta_i} \left[\operatorname{arctg} \frac{\theta_i}{n} + 2\pi - \gamma_i \right]} \right). \quad (27)$$

Рух між імпульсами вільний, тоді перший максимум буде при $t'_m = \frac{1}{\theta_1} \left[\operatorname{arctg} \frac{\theta_1}{n} - \gamma_1 \right]$, а ви-

раз для амплітудно-частотної характеристики для системи з кубічною характеристикою відновлювальної сили (17) прийме вираз

$$A \sqrt{\alpha + 0,5\beta A^2} = \frac{S}{M} \cdot \frac{\left(e^{\frac{2n\pi}{\omega}} \sqrt{1 + e^{\frac{4n\pi}{\omega}} - 2e^{\frac{2n\pi}{\omega}} \cos \frac{2\pi}{\omega} \theta} \right)}{1 + e^{\frac{4n\pi}{\omega}} - 2e^{\frac{2n\pi}{\omega}} \cos \frac{2\theta\pi}{\omega} + \frac{n}{\theta} e^{\frac{2n\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta} \times \left(e^{-\frac{n}{\theta} \left[\operatorname{arctg} \frac{\theta}{n} - \gamma_i \right]} \right). \quad (28)$$

Форму руху на періоді T між імпульсами необхідно будувати за виразом

$$x \sqrt{\alpha + \frac{1}{2}\beta x^2} = \frac{S}{M} \cdot \frac{\left(e^{nT} \sqrt{1 + e^{2nT} - 2e^{nT} \cos \theta_i T} \right)}{1 + e^{2nT} - 2e^{nT} \cos \theta_i T + \frac{n}{\theta_i} e^{nT} \sin \theta_i T} \times \quad (29)$$

$$\times e^{-nT} \sin(\theta_i t + \gamma_i),$$

а частоту коливань можна визначити за формулою:

$$\theta_i = \sqrt{\alpha + \frac{3}{4}\beta A_i^2}.$$

Наукова новизна та практична значимість

Вперше виконано рішення рівняння коливань балки з врахуванням поздовжньої сили. Встановлено критерії ударного резонансу для системи без тертя, а також з врахуванням

в'язкого тертя. Одержано вираз для амплітудно-частотної характеристики системи, що розглядається.

Дослідження коливань прогонової будови з врахуванням поздовжньої сили дали практичну цінність у можливості аналітичного обчислення форм коливань, критерії ударного резонансу та амплітудно-частотної характеристики системи від дії періодичних односторонніх імпульсних навантажень. Система балок прогонових будов враховує дефектні опорні частини (заклинення рухомих опорних частин) прогонових будов малих та середніх залізничних мостів.

Висновки

Виконано наближене аналітичне рішення методом змінного масштабу часу стаціонарних нелінійних коливань прогонової будови з врахуванням поздовжньої сили, що визвано односторонніми імпульсами, що періодично повторюються. Встановлено критерії ударного резонансу. Одержано вираз для амплітудно-частотної характеристики системи, що розглядається.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Burlon, A., Kougioumtzoglou, I. A., Failla, G., & Arena, F. (2019). Nonlinear Random Vibrations of Beams with In-Span Supports via Statistical Linearization with Constrained Modes. *Journal of Engineering Mechanics*, 145(6).
- Davtalab, S., Woo, K.-C., & Pagwiwoko, C. P., & Lenci, S. (2015). Nonlinear vibrations of a multi-span continuous beam subject to periodic impact excitation. *Meccanica*, 50(5), 1227-1237.
- Reshetnov, A. Yu., Solomka, V. I., & Ovchynnykov, P. A. (2017). Parameters of typical continuous steel truss spans under a high-speed movement. *Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика*, 11, 88-101.
- Yang, Y. B., Yau, J. D., & Wu, Y. S. (2004). *Vehicle-bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Бондарь, Н. Г. (1962). Нелинейные колебания балочных пролетных строений малых мостов. *Труды Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта*, 38, 60-65.
- Бондарь, Н. Г. (1969). *Некоторые автономные задачи нелинейной механики*. Киев: Наукова думка.
- Бондарь, Н. Г., & Попович, М. М. (1973). Стационарные нелинейные симметричные колебания,

МОСТИ ТА ТУНЕЛІ: ТЕОРІЯ, ДОСЛІДЖЕННЯ, ПРАКТИКА

- возбуждаемые мгновенными импульсами. *Вопросы теории колебаний и динамики мостов*, 150, 47-75.
- Казакевич, М. И. (2009). *Избранное*. Днепропетровск: Нова ідеологія.
- Ключник, С. В. (2017). Аналіз сучасного стану металевих прогонових будов залізничних мостів. *Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика*, 12, 29-40.
- Радзиховский Ю. А., Ройтбурд, З. Г., & Тененбаум, Э. М. (1976). Влияние состояния верхнего строения пути на процесс взаимодействия системы «мост-экипаж». *Труды Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта*, 178/20, 30-35.
- Радзиховский, Ю. А., Ройтбурд, З. Г., Тененбаум, Э. М. et al. (1980). Взаимодействие опытного состава с многопролетным мостом. *Вопросы динамики мостов и теории колебаний*, 207/24, 50-58.
- Тарасенко, В. П. (1972а). К вопросу о колебаниях балок, нагруженных системой сосредоточенных грузов. *Труды Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта*, 126, 127-138.
- Тарасенко, В. П. (1972б). Исследование пространственных колебаний пролетных строений металлических балочных мостов. *Труды Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта*, 127, 87-97.

М. М. POPOVICH¹, S. V. KLIUCHNYK^{2*}

¹ Department «Transport infrastructure», Ukrainian State University of Science and Technologies, Lazaryana Str., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (0562) 33 58 12, e-mail popovich.n.m@ukr.net, ORCID 0000-0003-1790-3110

^{2*} Department «Transport infrastructure», Ukrainian State University of Science and Technologies, Lazaryan St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (0562) 33 58 12, e-mail ssser05@ukr.net, ORCID 0000-0001-7771-8377

NONLINEAR STATIONARY OSCILLATIONS OF BEAM GIRDER STRUCTURES FROM THE ACTION OF PERIODIC PULSES

Purpose. The aim of this work is to construct an approximate solution of stationary oscillations of a nonlinear equation with a cubic characteristic. The design scheme under consideration best corresponds to the operating conditions of the girder structure in the event of defects of the supporting parts. In this case, longitudinal forces may appear in the girder of the girder structure. **Methods.** The paper investigates nonlinear oscillations of girder structures of small bridges. The undamped oscillations of the beam resting on hinged fixed support parts on both sides from the action of periodic unilateral impulse loading are considered. The design scheme differs from the statically defined beam scheme, which takes into account defective support parts. In the article, the possible transition to the beam system on moving support parts is considered. To solve the nonlinear equation of the second order of a single-span beam taking into account the longitudinal force, a method of variable time scale used, developed by Academician of the Academy of Sciences of the USSR, professor Bondar M. G. The method of variable scale gives fairly approximate solutions to this class of problems. **Results.** An approximate analytical solution is performed by the method of variable time scale of stationary nonlinear oscillations of the girder structure taking into account the longitudinal force caused by one-sided pulses that are periodically repeated. According to the obtained formulas of the solution of the nonlinear equation with cubic characteristic it is easy to construct amplitude-frequency characteristics and forms of oscillations. **Originality.** For the first time the solution of the equation of oscillations of a beam taking into account longitudinal force is executed. The criteria of impact resonance for the system without friction, as well as taking into account the viscous friction. An expression for the amplitude-frequency characteristic of the system under consideration is obtained. **Practical meaning.** Studies of beam structure oscillations taking into account the longitudinal force gave practical value in the possibility of analytical calculation of oscillation forms, shock resonance criteria and amplitude-frequency characteristics of the system from the action of periodic unilateral impulse loads. The system of girder beams takes into account defective supporting parts (jamming of movable supporting parts) of girder structures of small and medium railway bridges.

Keywords: stationary oscillations; shock pulse; beam; girder structure of the railway bridge; nonlinear oscillations; amplitude-frequency characteristic

REFERENCES

- Burlon, A., Kougioumtzoglou, I. A., Failla, G., & Arena, F. (2019). Nonlinear Random Vibrations of Beams with In-Span Supports via Statistical Linearization with Constrained Modes. *Journal of Engineering Mechanics*, 145(6). (in English)
- Davtalab, S., Woo, K-C., & Pagwiwoko, C. P., & Lenci, S. (2015). Nonlinear vibrations of a multi-span continuous beam subject to periodic impact excitation. *Meccanica*, 50(5), 1227-1237. (in English)
- Reshetnov, A. Yu., Solomka, V. I., & Ovchynnykov, P. A. (2017). Parameters of typical continuous steel truss spans under a high-speed movement. *Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика*, 11, 88-101. (in English)
- Yang, Y. B., Yau, J. D., & Wu, Y. S. (2004). *Vehicle-bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (in English)
- Bondar, N. G. (1962). Nelineynye kolebaniya balochnykh proletnykh stroeniy malykh mostov. *Trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta*, 38, 60-65. (in Russian)
- Bondar, N. G. (1969). *Nekotorye avtonomnye zadachi nelineynoy mekhaniki*. Kiev: Naukova dumka. (in Russian)
- Bondar, N. G., & Popovich, M. M. (1973). Statsionarnye nelineynye simmetrichnye kolebaniya, vzbuzhdaemye mgnovennymi impulsami. *Voprosy teorii kolebaniy i dinamiki mostov*, 150, 47-75. (in Russian)
- Kazakevich, M. I. (2009). *Izbrannoe*. Dnepropetrovsk: Nova ideologiya. (in Russian)
- Kliuchnyk, S. V. (2017). Analiz suchasnoho stanu metalevykh prohonovykh budov zaliznychnykh mostiv. *Mosty ta tuneli: teoriia, doslidzhennia, praktyka*, 12, 29-40. (in Ukrainian)
- Radzikhovskiy Yu. A., Roytburd, 3. G., & Tenenbaum, E. M. (1976). Vliyanie sostoyaniya verkhnego stroeniya puti na protsess vzaimodeystviya sistemy «most-ekipazh». *Trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta*, 178/20, 30-35. (in Russian)
- Radzikhovskiy, Yu. A., Roytburd, 3. G., Tennenbaum, E. M. et al. (1980). Vzaimodeystvie opytnogo sostava s mnogoproletnym mostom. *Voprosy dinamiki mostov i teorii kolebaniy*, 207/24, 50-58. (in Russian)
- Tarasenko, V. P. (1972a). K voprosu o kolebaniyakh balok, zagruzhennykh sistemoy sosredotochennykh gruzov. *Trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta*, 126, 127-138. (in Russian)
- Tarasenko, V. P. (1972b). Issledovanie prostranstvennykh kolebaniy proletnykh stroeniy metallicheskiykh balochnykh mostov. *Trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta*, 127, 87-97. (in Russian)

Надійшла до редколегії 04.04.2022.
Прийнята до друку 02.05.2022.